DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Чекеев А.А., Абдраимова М.А., Касымова А.Б., Асанбаева Ж.А.

БИР КАЛЫПТУУ ЧЕХ БОЮНЧА КОНФИНАЛДУУ ТОЛУК БИР КАЛЫПТУУ МЕЙКИНДИКТЕР

Чекеев А.А., Абдраимова М.А., Касымова А.Б., Асанбаева Ж.А.

РАВНОМЕРНО КОНФИНАЛЬНО ПОЛНЫЕ ПО ЧЕХУ РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

A.A. Chekeev, M.A. Abdraimova, A.B. Kasymova, J.A. Asanbaeva

UNIFORMLY COFINALLY ČECH COMPLETE UNIFORM SPACES

УДК: 515.12

Чех боюнча толук топологиялык мейкиндиктер жалпы топологияда маанилүү орунга ээ. Көрсө, метрикалык мейкиндиктердин толуктугу Чех боюнча толуктукка топологиялык эквиваленттүү. Чех боюнча толуктуктун күчөтүлгөн варианты бул Garcıa-Maynez [4] тарабынан киргизилген конфиналдык Чех боюнча толуктук. Бир калыптуу мейкиндиктер үчүн бир калыпта Чех боюнча толук мейкиндиктер M. Wilhelm [3] тарабынан киргизилген. Бир калыпта Чех боюнча толуктук образды жана прообразды көздөй бир калыпта жетик чагылдыруулардын учурунда сакталышы А.А.Борубаев [10] тарабынан көрсөтүлгөн. Сунушталган макалада бир калыпта конфиналдуу Чех боюнча толук мейкиндиктер аныкталат. Бул мейкиндиктердин классы куру эмес, себеби паракомпактуу конфиналдуу Чех боюнча толук мейкиндик өзүнөн универсалдуу бир калыптуулугуна карата бир калыпта конфиналдуу Чех боюнча толук мейкиндик болот. Жана ошондой эле бул макалада бир калыпта жетик чагылдыруулар учурунда бир калыпта конфиналдуу Чех боюнча толуктук образды жана прообразды көздөй сакталышы далилденди.

***Негизги сөздөр**: чех боюнча толуктук, конфиналдуу Чех боюнча толуктук, бир калыпта Чех боюнча толуктук, бир калыпта конфиналдуу Чех боюнча толуктук, жетик чагылдыруу, бир калыпта жетик чагылдыруу, паракомпактуулук.*

Полные по Чеху топологические пространства занимают важное место в общей топологии. Оказалось, что полнота метрических пространств топологически эквивалентна полноте по Чеху. Усиленный вариант полноты по Чеху – это конфинальная полнота по Чеху, которая введена Garcıa-Maynez [4]. Для равномерных пространств равномерно полные по Чеху пространства введены M. Wilhelm [3]. А.А.Борубаевым [10] показано, что равномерная полнота по Чеху сохраняется как в сторону образа, так и в сторону прообраза равномерно совершенными отображениями. В данной статье вводится понятие равномерно конфинально полного по Чеху равномерного пространства. Класс этих пространств является не пустым, так как паракомпактное конфинально полное по Чеху пространство является равномерно конфинально полным по Чеху пространством относительно универсальной равномерности. Также доказано, что при равномерных совершенных отображениях равномерно конфинальная полнота по Чеху сохраняется как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

***Ключевые слова:** полнота по Чеху, конфинальная полнота по Чеху, равномерная полнота по Чеху, равномерная конфинальная полнота по Чеху, совершенное отображение, равномерно совершенное отображение, паракомпактность.*

Čech-complete topological spaces take an important place in the general topology. It turned out that the completeness of metric spaces is topologically equivalent to the Čech completeness. The reinforced variant of the Čech completeness is the cofinal Čech completeness that is introduced by Garcıa-Maynez [4]. For uniform spaces, uniformly Čech completeness spaces are introduced by M. Wilhelm [3]. A.A Borubaev [10] showed that the uniform Cech completeness is preserved by the image and by the preimage by uniformly perfect mappings. This paper introduces the concept of a uniformly cofinally Cech-complete uniform space. The class of these spaces is non-empty, because of a paracompact cofinally Cech complete space is a uniformly cofinally Čech-complete space with respect to the universal uniformity. It is also proved that uniformly cofinally Čech completeness is preserved by the image and by the preimage by uniformly perfect mappings.

***Key words:** čech completeness, cofinal Čech completeness, uniform Čech completeness, uniformly cofinally Čech completeness, perfect mapping, uniformly perfect mapping, paracompactness.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

1. Введение и предварительные сведения.

Топологическая полнота или полнота по Чеху топологических пространств [1] характеризуется при помощи полной системы покрытий [2]. Напомним, что последовательность $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ открытых покрытий топологического пространства X называется *полной,* если $\cap\mathcal{F} \neq \varnothing$ для такого фильтра $\mathcal{F}$, что как только для любого $n\in\mathbb{N}$ найдется $A\in\alpha_n$ и $F_A\in\mathcal{F}$ такие, что $F_A\subset A$ [2]. Если последовательность $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ состоит из равномерных покрытий равномерного пространства uX и является полной системой, то равномерное пространство называется *равномерно полным по Чеху* [3]. Усилением полноты по Чеху является конфинальная полнота по Чеху [4]. Пространство X называется *конфинально полным по Чеху* [4], если существует последовательность $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ открытых покрытий пространства X, удовлетворяющих следующему свойству:

если $\mathcal{F}$ такой фильтр, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует $A_n\in\alpha_n$, пересекающийся с каждым элементом фильтра $\mathcal{F}$, т.е. $\cap\{[F]: F\in\mathcal{F}\}\neq\varnothing$ и последовательность открытых покрытий $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называют *конфинально полной по Чеху системой.*

В данной статье вводиться новое понятие *равномерно конфинально полного по Чеху* равномерного пространства и устанавливаются основные свойства этого класса равномерных пространств. Информация, обозначения о равномерных пространствах берется из книг [5, 6]. Информация, обозначения о топологических пространствах берется из книги [1]. Основные свойства о конфинально полных равномерных пространствах берется из книги [7].

2. Основные результаты.

Определение 2.1. Равномерное пространство uX *называется равномерно конфинально полным по Чеху*, если существует конфинально полная по Чеху система $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерных покрытий $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{U}$.

Теорема 2.2. *Пусть X - Тихоновское пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. X паракомпактно и конфинально полно по Чеху.

2. X равномерно конфинально полно по Чеху относительно универсальной равномерности $\mathcal{U}_f$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Так как X - паракомпактное тихоновское пространство, то все открытые покрытия X образуют универсальную равномерность $\mathcal{U}_f$ [1]. В силу конфинальной полноты по Чеху полная система открытых покрытий $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ содержатся в универсальной равномерности $\mathcal{U}_f$. Итак, равномерное пространство $u_f X$ равномерно конфинально полно по Чеху.

(2) $\Rightarrow$ (1) Так X конфинально полно по Чеху относительно универсальной равномерности $\mathcal{U}_f$, то равномерное пространство $u_f X$ является равномерно полным по Чеху пространством [3], следовательно X-паракомпактное пространство. Так как X равномерно конфинально полно относительно равномерности $\mathcal{U}_f$, то X конфинально полно по Чеху.

Теорема 2.2. доказана.

Определение 2.3 [8]. Равномерно непрерывное отображение $f: uX\to vY$ равномерного пространства uX на равномерное пространство vY называется *дважды равномерно непрерывным* , если для любого $\alpha\in\mathcal{U}$ существует такое $\beta\in\mathcal{V}$, что покрытие $f^{-1}(\beta)$ вписано в покрытие $\alpha^{<}$, где $\alpha^{<}=\{\cup\alpha' : \alpha'\subset\alpha \quad и \quad \alpha' - конечно\}$.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Предложение 2.4. *Пусть* $f: uX \to vY$ *- дважды равномерно непрерывное отображение. Тогда, если* uX *- равномерно конфинально полно по Чеху, то* vY *также равномерно конфинально полно по Чеху.*

Доказательство. Так как uX - равномерно конфинально полно по Чеху, то существует полная последовательность $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерных покрытий из $\mathcal{U}$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ из системы $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ существует $\beta_n \in \mathcal{V}$ такое, что $f^{-1}(\beta_n)$ вписано в $\overset{<}{\alpha_n}$. Покажем, что система равномерных покрытий $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ является конфинально полной по Чеху системой на Y. Пусть $\mathcal{F}$ - произвольно слабый фильтр Коши на Y относительно системы $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, т.е. для любого $n\in\mathbb{N}$ найдется $B_n \in \beta_n$ такой, что $B_n \cap F \neq \varnothing$ для всех $F \in \mathcal{F}$. Пусть ξ - ультрафильтр содержащий центрированную систему $\{f^{-1}(F): F \in \mathcal{F}\}$. Тогда для каждого $n\in\mathbb{N}$ найдется такое конечное подсемейство $\alpha'_n \subset \alpha_n$, что $\cup\alpha'_n \in \xi$, т.е. ультрафильтр ξ является фильтром Коши относительно последовательности $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тем более ξ является слабым фильтром Коши относительно последовательности $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Так как, по условию uX равномерно конфинально полно по Чеху, то ультрафильтр ξ сходится к некоторой точке $x \in X$. Следовательно, $f(\xi)$ сходится к точке $f(x)$ и $\mathcal{F} \subset f(\xi)$, т.е. точка $f(x)$ является точкой прикосновения слабого фильтра Коши $\mathcal{F}$. Таким образом равномерное пространство vY равномерно конфинально полно по Чеху.

Предложение 2.4. доказано.

Напомним [9], что непрерывное отображение $f: X \to Y$ между топологическими пространствами X и Y называется *совершенным*, если оно замкнуто и компактно, т.е. прообраз $f^{-1}(y)$ компактен для любой точки $y \in Y$.

Предложение 2.5. *Пусть* $f: uX \to vY$ *- совершенное равномерно непрерывное отображение между равномерными пространствами* uX *и* vY. *Тогда, если* vY *равномерно конфинально полно по Чеху, то* uX *также равномерно конфинально полно по Чеху.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - равномерно конфинально полная по Чеху система на vY. Покажем, что система $\{f^{-1}(\alpha_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ является аналогичной системой на uX. Пусть $\mathcal{F}$ - такой фильтр на X, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ найдется $A_n \in \alpha_n$, удовлетворяющий $f^{-1}(A_n) \cap F \neq \varnothing$ для всех $F \in \mathcal{F}$. Тогда $A_n \cap f(F) \neq \varnothing$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $F \in \mathcal{F}$. Тогда семейство $\{f(F): F \in \mathcal{F}\}$ является базой слабого фильтра Коши относительно системы $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, следовательно имеем точку прикосновения $y \in Y$, т.е. $y \in \cap\{\overline{f(F)}: F \in \mathcal{F}\}$. Так как f -замкнуто, то $y \in f(\bar{F}) = \overline{f(F)}$ для всех $F \in \mathcal{F}$. Более того $\bar{F} \cap f^{-1}(y) \neq \varnothing$ для всех $F \in \mathcal{F}$. В силу компактности $f^{-1}(y)$ имеем $\cap\{\bar{F} \cap f^{-1}(y): F \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing$, т.е. $\cap\{\bar{F}: F \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing$. Таким образом, uX равномерно конфинально полно по Чеху.

Предложение 2.5. доказано.

Теорема 2.6. *Пусть* $f: uX \to vY$ *- равномерно совершенное отображение между равномерными пространствами* uX *и* vY. *Тогда следующие условия равносильны:*

1. uX *равномерно конфинально полно по Чеху.*
2. vY *равномерно конфинально полно по Чеху.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$. Так каждое равномерно совершенное отображение является дважды равномерно непрерывным [10], то импликация получается из предложения 2.4.

$(2) \Rightarrow (1)$. Всякое равномерно совершенное отображение является совершенным, следовательно, импликация получается из предложения 2.5.

Примечание 2.7. Классы паракомпактных равномерных пространств, более широкие чем класс равномерно конфинально полно по Чеху равномерных пространств исследовались в работах [12, 13].

Литература:

1. R. Engelking, General Topology, Berlin: Heldermann, 1989. p.626.
2. Z. Frolik, Generalization of the –property of complete metric spaces, Czech. Math. J. 10(1960), pp. 359-379.
3. M. Wilhelm, Criteria of openness for relation, Fund. Math. CXIV (1981) pp. 219-228.
A. Garcıa-Maynez, S. Romaguera, Perfect preimages of cofinally complete metric spaces, Comment. Math. Univ. Carolin. 40, 2 (1999) pp. 335-342.
4. J. R. Isbell, Uniform spaces: Mathematical Survey, Providence, 1964. p. 175
5. Борубаев А.А., Чекеев А.А., Равномерные структуры на топологических пространствах и группах. - Бишкек, 1997. - С. 268.
6. Norman R. Howes, Modern analysis and topology, Springer-Verlag, New York.
7. Пасынков Б.А. О топологических группах. - ДАН СССР, 1969. - Т. 188. - С. 281-282.
8. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М.: Наука, 1974.
9. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. - Фрунзе: Илим, 1990.
10. Чекеев А.А., Аблабекова Ч.А. О функциональной равномерной R-паракомпактности равномерных пространств. / Республиканский научно-теоретический журна «Известия вузов Кыргызстана», №3. - Бишкек, 2011. - С. 3-7.
11. Аблабекова Ч.А. Об оперениях равномерных абсолютов. / Республиканский научно-теоретический журна «Известия вузов Кыргызстана», №1. - Бишкек, 2014. - С. 3-5.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Касымова Т.Дж.