DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 3, 2019

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Асылбеков Т.Д., Нуранов Б.Ш., Таалайбеков Н.Т.

КОЭФФИЦИЕНТТЕРИ ҮЗГҮЛТҮККӨ ЭЭ ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН БИЦАДЗЕ-САМАРСКИЙ ТИБИНДЕГИ ЛОКАЛДЫК ЭМЕС ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕР

Асылбеков Т.Д., Нуранов Б.Ш., Таалайбеков Н.Т.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

T.D. Asylbekov, B.Sh. Nuranov, N.T. Taalaybekov

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE TYPE OF BITSADZE-SAMARSKIY FOR A HYPERBOLIC EQUATION OF FOURTH ORDER WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

УДК: 517.95

Азыркы мезгилде интегралдык шарттары менен жекече туундусу бар дифференциалдык теңдемелер үчүн коюлган маселелер актуалдуу болуп активдүү изилденүүдө. Бир катар физикалык процесстердин математикалык моделин тургузуп изилдөөдө математикалык физиканын классикалык маселелерин жалпылоодо келип чыккан зарылчылыктан локалдык эмес маселелер актуалдуу болуп жатат. Бул макалада коэффициенттери биринчи роддогу үзүлүүгө ээ болгон жана интегралдык шарттары бар локалдык эмес маселелерди изилдөө каралды. Бул макалада коэффициенттери үзгүлтүккө ээ төртүнчү тартиптеги гиперболикалык теңдеме үчүн Бицадзе-Самарский тибиндеги локалдык эмес чек аралык маселелер каралган. Макаланын негизги максаты Бицадзе-Самарский тибиндеги локалдык эмес чек аралык маселелердин чечилишин Риман функциясы усулунун жардамында далилдөөнү демонстрациялоо болуп саналат. Коюлган маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы далилденген.

Негизги сөздөр: *гиперболикалык теңдеме, локалдык эмес маселе, Бицадзе-Самарский тибиндеги шарттар, Риман функциясы, интегралдык теңдеме, Гурстун маселеси, Кошинин маселеси.*

В настоящее время задачи с нелокальными условиями для уравнений в частных производных активно изучаются. Интерес к ним вызван необходимостью обобщения классических задач математической физики в связи с математическим моделированием ряда физических процессов, изучаемых современным естествознанием. Исследованию разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями, при которых коэффициенты имеют разрыв первого рода и посвящена данная статья. В статье рассматриваются задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами. Используя метод функции Римана, задача сведена к системе интегральных уравнений типа Вольтерра, допускающего единственное решение. Основной целью статьи является демонстрация метода функции Римана, позволяющего доказать разрешимость задачи типа Бицадзе-Самарского. Доказаны существование и единственность решений поставленных задач.

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение, нелокальная задача, условия типа Бицадзе-Самарского, функция Римана, интегральное уравнение, задача Гурса, задача Коши.*

Currently, the problem with nonlocal conditions for partial differential equations have been studied intensively. Interest in them is caused by the need to generalize the classical problems of mathematical physics in connection with the mathematical modeling of a number of physical processes studied by modern natural science. To study the solvability of a nonlocal problem

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

with integral conditions, when the coefficients of which suffer a first-order discontinuity, this article is devoted. The article deals with the problems of Bitsadze-Samaskiy type for the hyperbolic equation of the fourth order with discontinuous coefficients. Using the Ryman function method, the problem is reduced to a system of Volterra-type integral equations admitting a single solution. The main purpose of the article is to demonstrate the Ryman function method, which allows to prove the solvability of the Bitsadze-Samarskiy type problem. The existence and uniqueness of solutions to the problems are proved.

Key words: *hyperbolic equation, nonlocal problem, terms of the type of Bitsadze-Samarskiy, function of Ryman, integral equation, the Goursat problem, the Cauchy problem.*

Введение. В настоящее время задачи с нелокальными условиями для уравнений в частных производных активно изучаются. Интерес к ним вызван необходимостью обобщения классических задач математической физики в связи с математическим моделированием ряда физических процессов, изучаемых современным естествознанием [5].

Задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений рассмотрены в статьях [6-8]. Задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболических уравнений четвертого порядка рассмотрены небольшие количества работ, причем в них рассмотрены лишь модельные уравнения. Отметим здесь работы А.С. Сопуева [1-4] и его учеников.

Исследованию разрешимости нелокальной задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами и посвящена данная статья.

Постановка задачи. В области $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x,y): 0 < x < x_0, 0 < y < h\}$, $D_1 = \{(x,y): x_0 < x < \ell,\ 0 < y < h\}$для гиперболического уравнения четвертого порядка, коэффициенты которого терпят разрыв первого рода при переходе через линии $x = x_{0,}\ 0 < y < h$,

$$L(u) \equiv u_{xxxy}(x,y) + \alpha_1(x,y)u_{xxx}(x,y) + \alpha_2(x,y)u_{xxy}(x,y) + \beta_1(x,y)u_{xx}(x,y) +$$

$$+\beta_2(x,y)u_{xy}(x,y) + \gamma_1(x,y)u_x(x,y) + \gamma_2(x,y)u_y(x,y) + \delta(x,y)u(x,y) = f(x,y), \quad (1)$$

где

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta, f \in C(\overline{D}),\ \ i = 1,2,\ \ M = \{u, u_x, u_{xx} \in C(\overline{D}),\ u_y, u_{xy}\ , u_{xxx}, u_{xxy}\ \in C(D)\},$$

рассмотрим задачу нелокальными условиями второго рода.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $D\backslash(x = x_0)$, удовлетворяющее условиям:

$$u(0,y) = \lambda_1(y)u(x_0 - 0, y), \qquad 0 \le y \le h, \qquad (x,y) \in D_1, \quad (2)$$

$$u_x(0,y) = \lambda_2(y)u_x(x_0 - 0, y), \qquad 0 \le y \le h, \qquad (x,y) \in D_1, \quad (3)$$

$$u_{xx}(\ell,y) = \lambda_3(y)u_{xx}(x_0 + 0, y), \qquad 0 \le y \le h, \qquad (x,y) \in D_2, \quad (4)$$

начальным условиям:

$$u(x,0) = \psi_1(x),\ \ 0 \le x \le x_0,\ \ \text{в}\ D_1 \quad (5)$$

$$u(x,0) = \psi_2(x),\ \ x_0 \le x \le \ell,\ \text{в}\ D_2 \quad (6)$$

условиям сопряжения на линии разрыва коэффициентов:

$$u(x-0,y) = u(x+0,y) = \tau(y), \quad (7)$$

$$u_x(x-0,y) = u_x(x+0,y) = \nu(y), \quad (8)$$

$$u_{xx}(x-0,y) = u_{xx}(x+0,y) = \mu(y), \quad (9)$$

где $\psi_j(y),\ j = \overline{1,2}, \lambda_i(y),\ i = \overline{1,3}$ – заданные гладкие функции, причем

$$\psi_i(x_0) = \tau(0),\ \psi_i'(x_0) = \nu(0),\ \psi_i''(x_0) = \mu(0),\ i = 1,2, \quad (10)$$

Разрешимость задачи докажем методом функции Римана.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Решение задачи ищем в виде:

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{в } D_1, \\ u_2, & \text{в } D_2. \end{cases}$$

Функция Римана. Сначала в области D_1 и D_2 рассмотрим задачу Гурса для уравнения (1) с условиями (7), (8), (9).

Нетрудно заметить, что решение задачи Гурса и функция Римана в области D_1 представимо в виде[2,3,9]:

$$u_1(x,y) = v_{1\xi\xi}(x,y;x,0)\psi_1(x) - \int_{x_0}^{x} A_1(x,y,\xi)\psi_1(\xi)d\xi + \int_0^y [v_1(x,y;x_0,\eta)\mu'(\eta) +$$
$$+\alpha_1(x_0,\eta)v_1(x,y;x_0,\eta)\mu(\eta) - B_1(x,y,\eta)\nu'(\eta) + C_1(x,y,\eta)\nu(\eta) + D_1(x,y,\eta)\tau'(\eta) + \quad (11)$$
$$+E_1(x,y,\eta)\tau(\eta)]d\eta - \int_{x_0}^{x} d\xi \int_0^y v_1(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta,$$

где

$$A_1(x,y,\xi) = v_{1\xi\xi\xi}(x,y;\xi,0) - \alpha_{2\xi\xi}(\xi,0)v_1(x,y;\xi,0) - 2\alpha_{2\xi}(\xi,0)v_{1\xi}(x,y;\xi,0) -$$
$$-\alpha_2(\xi,0)v_{1\xi\xi}(x,y;\xi,0) + \beta_{2\xi}(\xi,0)v_1(x,y;\xi,0) + \beta_2(\xi,0)v_{1\xi}(x,y;\xi,0) -$$
$$-\gamma_2(\xi,0)v_1(x,y;\xi,0),$$
$$B_1(x,y,\eta) = v_{1\xi}(x,y;x_0,\eta) + \alpha_{2\xi}(x_0,\eta)v_1(x,y;x_0,\eta),$$
$$C_1(x,y,\eta) = -\alpha_{1\xi}(x_0,\eta)v_1(x,y;x_0,\eta) - \alpha_1(x_0,\eta)v_{1\xi}(x,y;x_0,\eta) + \beta_1(x_0,\eta)v_1(x,y;x_0,\eta),$$
$$D_1(x,y,\eta) = v_{1\xi\xi}(x,y;x_0,\eta) + \alpha_{2\xi}(x_0,\eta)v_1(x,y;x_0,\eta) - \alpha_2(x_0,\eta)v_{1\xi}(x,y;x_0,\eta) +$$
$$+\beta_2(x_0,\eta)v_1(x,y;x_0,\eta),$$
$$E_1(x,y,\eta) = \alpha_{1\xi\xi}(x_0,\eta)v_1(x,y;x_0,\eta) + 2\alpha_{1\xi}(x_0,\eta)v_{1\xi}(x,y;x_0,\eta) +$$
$$+\alpha_1(x_0,\eta)v_{1\xi\xi}(x,y;x_0,\eta) - \beta_{1\xi}(x_0,\eta)v_1(x,y;x_0,\eta) - \beta_1(x_0,\eta)v_{1\xi}(x,y;x_0,\eta) +$$
$$+\gamma_1(x_0,\eta)v_1(x,y;x_0,\eta),$$

где $v_1(x,y;\xi,\eta) -$ функция Римана, удовлетворяет условиям:

1. $v_1(x,y;\xi,\eta) -$ решение сопряженной задачи:

$$L^*(v_1) = v_{1\xi\xi\xi\eta} - (\alpha_1 v_1)_{\xi\xi\xi} - (\alpha_2 v_1)_{\xi\xi\eta} + (\beta_1 v_1)_{\xi\xi} + (\beta_2 v_1)_{\xi\eta} - (\gamma_1 v_1)_\xi -$$
$$-(\gamma_2 v_1)_\eta + \delta v_1 = 0, \quad (12)$$
$$v_1(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x} = 0, \quad v_1(x,y;x,y) = 1,$$
$$v_{1\xi}(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x} = 0, \quad v_1(x,y;\xi,y) = \omega(x,y,\xi),$$

2. $\omega(x,y,\xi) -$ решение следующей задачи Коши[10, 11]:

$$v_{1\xi\xi\xi}(x,y;\xi,y) - \alpha_2(\xi,y)v_{1\xi\xi}(x,y;\xi,y) + \big[\beta_2(\xi,y) - 2\alpha_{2\xi}(\xi,y)\big]v_{1\xi}(x,y;\xi,y) +$$
$$+\big[\beta_{2\xi}(\xi,y) - 2\alpha_{2\xi\xi}(\xi,y) - \gamma_2(\xi,y)\big]v_{1\xi}(x,y;\xi,y) = 0, \quad (13)$$
$$v_1(x,y;\xi,y)|_{\xi=x} = 0, \qquad v_{1\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x} = 0, \quad v_1(x,y;x,y) = 1.$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Известно, что решение задачи Гурса и в области D_2 представимо в виде [2,3]:

$$u_2(x,y)=v_{2\xi\xi}(x,y;x,0)\psi_2(x)-\int_{x_0}^{x}A_2(x,y,\xi)\psi_2(\xi)d\xi-\int_0^y[v_2(x,y;x_0,\eta)\mu'(\eta)+$$

$$+\alpha_1(x_0,\eta)v_2(x,y;x_0,\eta)\mu(\eta)-B_2(x,y,\eta)\nu'(\eta)+C_2(x,y,\eta)\nu(\eta)+D_2(x,y,\eta)\tau'(\eta) \quad (14)$$

$$+E_2(x,y,\eta)\tau(\eta)]d\eta-\int_{x_0}^{x}d\xi\int_0^y v_2(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta,$$

где $v_2\,(x,y;\xi,\eta)-$ функция Римана. Аналогично $v_1(x,y;\xi,\eta)$ построена функция $v_2(x,y;\xi,\eta)$ в области D_2.

где

$$A_2(x,y,\xi)=v_{2\xi\xi\xi}(x,y;\xi,0)-\alpha_{2\xi\xi}(\xi,0)v_2(x,y;\xi,0)-2\alpha_{2\xi}(\xi,0)v_{2\xi}(x,y;\xi,0)-$$

$$-\alpha_2(\xi,0)v_{2\xi\xi}(x,y;\xi,0)+\beta_{2\xi}(\xi,0)v_2(x,y;\xi,0)+\beta_2(\xi,0)v_{2\xi}(x,y;\xi,0)-$$

$$-\gamma_2(\xi,0)v_2(x,y;\xi,0),$$

$$B_2(x,y,\eta)=v_{2\xi}(x,y;x_0,\eta)+\alpha_{2\xi}(x_0,\eta)v_2(x,y;x_0,\eta),$$

$$C_2(x,y,\eta)=-\alpha_{1\xi}(x_0,\eta)v_2(x,y;x_0,\eta)-\alpha_1(x_0,\eta)v_{2\xi}(x,y;x_0,\eta)+\beta_1(x_0,\eta)v_2(x,y;x_0,\eta),$$

$$D_2(x,y,\eta)=v_{2\xi\xi}(x,y;x_0,\eta)+\alpha_{2\xi}(x_0,\eta)v_2(x,y;x_0,\eta)-\alpha_2(x_0,\eta)v_{2\xi}(x,y;x_0,\eta)+$$

$$+\beta_2(x_0,\eta)v_2(x,y;x_0,\eta),$$

$$E_2(x,y,\eta)=\alpha_{1\xi\xi}(x_0,\eta)v_2(x,y;x_0,\eta)+2\alpha_{1\xi}(x_0,\eta)v_{2\xi}(x,y;x_0,\eta)+$$

$$+\alpha_1(x_0,\eta)v_{2\xi\xi}(x,y;x_0,\eta)-\beta_{1\xi}(x_0,\eta)v_2(x,y;x_0,\eta)-\beta_1(x_0,\eta)v_{2\xi}(x,y;x_0,\eta)+$$

$$+\gamma_1(x_0,\eta)v_2(x,y;x_0,\eta).$$

Сведение задачи 1 к системе интегральных уравнений. Применив интегрирование по частям, воспользовавшись условиям (2), условиям согласования (10) и обозначив через $g_1(y)$ все известные функции из (11) имеем:

$$(D_1(0,y,y)-\lambda_1(y))\tau(y)+B_1(0,y,y)\nu(y)+v_1(0,y;x_0,y)\mu(y)-\int_0^y\big[(D_{1\eta}(0,y,\eta)+$$

$$+E_1(0,y,\eta))\tau(\eta)-\Big(B_{1\eta}(0,y,\eta)-C_1(0,y,\eta)\Big)\nu(\eta)++(v_{1\eta}(0,y;x_0,\eta)+$$

$$+\alpha_1(x_0,\eta)v_1(0,y;x_0,\eta))\mu(\eta)]d\eta=-g_1(x,y), \quad (15)$$

где

$$g_1(x,y)=v_{1\xi\xi}(0,y;0{,}0)\psi_1(0)-\int_{x_0}^{0}A_1(\,0,y,\xi)\psi_1(\xi)d\xi-\int_{x_0}^{0}d\xi\int_0^y v_1(0,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta-$$

$$-v_1(0,y;x_0,0)\mu(0)-B_1(0,y,0)\nu(0)+D_1(0,y,0)\tau(0)-\int_{x_0}^{0}d\xi\int_0^y v_1(0,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta.$$

Применив интегрирование по частям, воспользовавшись условиям (3), условиям согласования (10) и обозначив через $g_2(y)$ все известные функции из (11) имеем:

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 3, 2019

$$D_{1x}(0,y,y)\tau(y)-(\lambda_2(y)+B_{1x}(0,y,y))\nu(y)+v_{1x}(0,y;x_0,y)\mu(y)-$$
$$-\int_0^y(D_{1\eta x}(0,y,\eta)+E_{1x}(0,y,\eta))\tau(\eta)-(B_{1\eta x}(0,y,\eta)-C_{1x}(0,y,\eta))\nu(\eta)+$$
$$+(v_{1\eta x}(0,y;x_0,\eta)+(x_0,\eta)v_{1x}(0,y;x_0,\eta))\mu(\eta)]d\eta=-g_2(x,y), \tag{16}$$

где

$$g_2(x,y)=v_{1\xi\xi x}(0,y;0{,}0)\psi_1(0)+v_{1\xi\xi}(0,y;0{,}0)\psi_1'(0)-\int_{x_0}^0 A_{1x}(0,y,\xi)\psi_1(\xi)d\xi-$$
$$-A_1(0,y,0)\psi_1(0)-v_{1x}(0,y;x_0,0)\mu(0)-B_{1x}(0,y,0)\nu(0)+D_{1x}(0,y,0)\tau(0)+$$
$$+\int_{x_0}^0 d\xi\int_0^y v_{1x}(0,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta+\int_0^y v_1(0,y;0,\eta)f(0,\eta)d\eta.$$

Дважды дифференцируя (14) по $\boldsymbol{x}$ и применив интегрирование по частям, воспользовавшись условиям (4), условиям согласования (10), обозначив $g_3(y)$ все известные функции из (14) имеем:

$$D_{2xx}(\ell,y,y)\tau(y)-B_{2xx}(\ell,y,y)\nu(y)+(-v_{2xx}(\ell,y;x_0,y)+\lambda_3(y))\mu(y)-$$
$$-\int_0^y[\Big(D_{2\eta xx}(\ell,y,\eta)+E_{2xx}(\ell,y,\eta)\Big)\tau(\eta)-\Big(B_{2\eta xx}(\ell,y,\eta)-C_{2xx}(\ell,y,\eta)\Big)\nu(\eta)+$$
$$+(v_{2\eta xx}(\ell,y;x_0,\eta)+\alpha_1(x_0,\eta)v_{2xx}(\ell,y;x_0,\eta))\mu(\eta)]d\eta=g_3(y), \tag{17}$$

где

$$g_3(y)=v_{2\xi\xi xx}(\ell,y;\ell,0)\psi_2(\ell)+2v_{2\xi\xi x}(\ell,y;\ell,0)\psi_2'(\ell)+v_{2\xi\xi}(\ell,y;\ell,0)\psi_2''(\ell)-$$
$$-\int_{x_0}^{\ell}A_{2xx}(\ell,y,\xi)\psi_2(\xi)d\xi-2A_{2x}(\ell,y,\ell)\psi_2(\ell)-A_2(\ell,y,\ell)\psi_2'(\ell)-v_{2xx}(\ell,y;x_0,0)\mu(0)-$$
$$-B_{2xx}(\ell,y,0)\nu(0)+D_{2xx}(\ell,y,0)\tau(0)+\int_{x_0}^{\ell}d\xi\int_0^y v_{2xx}(\ell,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta+$$
$$+\int_0^y v_{2x}(\ell,y;\ell,\eta)f(\ell,\eta)d\eta+\int_0^y v_{2xx}(\ell,y;\ell,\eta)f(\ell,\eta)d\eta.$$

Введем следующие обозначение:

$H_{11}(y,\eta)=D_{1\eta}(0,y,\eta)+E_1(0,y,\eta)$,

$H_{12}(y,\eta)=B_{1\eta}(0,y,\eta)-C_1(0,y,\eta)$,

$H_{12}(y,\eta)=v_{1\eta}(0,y;x_0,\eta)+\alpha_1(x_0,\eta)v_1(0,y;x_0,\eta)$,

$H_{21}(y,\eta)=D_{1\eta x}(0,y,\eta)+E_{1x}(0,y,\eta)$,

$H_{22}(y,\eta)=B_{1\eta x}(0,y,\eta)-C_{1x}(0,y,\eta)$,

$H_{23}(y,\eta)=v_{1\eta x}(0,y;x_0,\eta)+\alpha_1(x_0,\eta)v_{1x}(0,y;x_0,\eta)$,

$H_{31}(y,\eta)=D_{2\eta x}(0,y,\eta)+E_{2x}(0,y,\eta)$,

$H_{32}(y,\eta)=B_{2\eta x}(0,y,\eta)-C_{2x}(0,y,\eta)$,

$H_{33}(y,\eta)=v_{2\eta x}(0,y;x_0,\eta)+\alpha_2(x_0,\eta)v_{2x}(0,y;x_0,\eta)$,

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

тогда из (15), (16), (17) имеем:

$$(D_1(0,y,y)-\lambda_1(y))\tau(y)+B_1(0,y,y)\nu(y)+v_1(0,y;x_0,y)\mu(y)-\int_0^y[H_{11}(y,\eta)\,\tau(\eta)-$$
$$-H_{12}(y,\eta)\nu(\eta)+\ H_{13}(y,\eta)\mu(\eta)]d\eta=-g_1(x,y), \tag{18}$$
$$D_{1x}(0,y,y)\tau(y)-(\lambda_2(y)+B_{1x}(0,y,y))\nu(y)+v_{1x}(0,y;x_0,y)\mu(y)-\int_0^y[H_{21}(y,\eta)\,\tau(\eta)-$$
$$-H_{22}(y,\eta)\nu(\eta)+\ H_{23}(y,\eta)\mu(\eta)]d\eta=-g_2(x,y), \tag{19}$$
$$D_{2xx}(\ell,y,y)\tau(y)-B_{2xx}(\ell,y,y)\nu(y)+(-v_{2xx}(\ell,y;x_0,y)+\lambda_3(y))\mu(y)-$$
$$-\int_0^y[H_{31}(y,\eta)\,\tau(\eta)-\ H_{32}(y,\eta)\nu(\eta)+\ H_{33}(y,\eta)\mu(\eta)]d\eta=-g_3(x,y. \tag{20}$$

Введем следующие обозначение:

$$\Phi(y)=\begin{pmatrix}\tau(y)\\ \nu(y)\\ \mu(y)\end{pmatrix},\qquad G(y)=\begin{pmatrix}-g_1(y)\\ -\ g_2(y)\\ -g_3(y)\end{pmatrix},$$

$$A(y)=\begin{pmatrix}D_1(0,y,y)-\lambda_1(y) & B_1(0,y,y) & v_1(0,y;x_0,y)\\ v_{1x}(0,y;x_0,y) & -(\lambda_2(y)+B_{1x}(0,y,y)) & D_{1x}(0,y,y)\\ -v_{2xx}(\ell,y;x_0,y) & -B_{2xx}(\ell,y,y) & -v_{2xx}(\ell,y;x_0,y)+\lambda_3(y)\end{pmatrix}$$

$$K(y,\eta)=\begin{pmatrix}H_{11}(y,\eta) & H_{12}(y,\eta) & H_{13}(y,\eta)\\ H_{21}(y,\eta) & H_{22}(y,\eta) & H_{23}(y,\eta)\\ H_{31}(y,\eta) & H_{32}(y,\eta) & H_{33}(y,\eta)\end{pmatrix},$$

тогда система уравнений (18), (19), (20) имеет вид:

$$A(y)\Phi(y)+\int_0^y K(y,\eta)\Phi(\eta)d\eta=G(y). \tag{21}$$

Разрешимость задачи 1. Отметим, что система уравнений (21) представляет собой замкнутую систему уравнений относительно функций $\mu(y),\nu(y),\tau(y)$. Если выполняется условие

$$|A(y)|=\begin{vmatrix}D_1(0,y,y)-\lambda_1(y) & B_1(0,y,y) & v_1(0,y;x_0,y)\\ v_{1x}(0,y;x_0,y) & -(\lambda_2(y)+B_{1x}(0,y,y)) & D_{1x}(0,y,y)\\ -v_{2xx}(\ell,y;x_0,y) & -B_{2xx}(\ell,y,y) & -v_{2xx}(\ell,y;x_0,y)+\lambda_3(y)\end{vmatrix}\neq 0, \tag{22}$$

то система (21) является системой интегральных уравнений типа Вольтерра, допускающее единственное решение.

Поставляя найденые $\tau(y),\nu(y),\mu(y)$ в (12) получим решение задачи 1.

Итак, справедлива следующая

Теорема 1. Если выполняются условий (2)-(10) и (22) то в области $D\backslash(x=x_0)$ решение задачи 1 существует и единственно в классе *M.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Разрешимость задачи 2 доказывается аналогично методом функции Римана.

Задача 2. Найти решение уравнения (1) в области $D\backslash(x = x_0)$, удовлетворяющее условиям:

$$u(0,y) = \lambda_1(y)u(\ell,y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{23}$$

$$u_x(0,y) = \lambda_2(y)u_x(\ell,y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{24}$$

$$u_{xx}(\ell,y) = \lambda_3(y)u_{xx}(0,y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{25}$$

начальным условиям (5), (6), условиям сопряжения на линии разрыва коэффициентов (7), (8), (9) и условиям согласования (10).

Разрешимость задачи 2 доказывается аналогично методом функции Римана.

Ипользуя (23), (24), (25) в (11), (14) приводится к системе интегральных уравнений относительно $\tau(y), \nu(y), \mu(y)$.

Поставляя найденые $\tau(y), \nu(y), \mu(y)$ в (12) получим решение задачи 2.

Литература:

1. Сопуев А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: Дис. …докт. ф.-м.н.: 01.01.02. - Бишкек, 1996. - 249 с.
2. Асылбеков Т.Д., Пирматов А.З. «Об обобщениях задачи типа Бицадзе-Самарского для модельного гиперболического уравнения четвертого порядка с двукратными характеристиками». // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2006, Выпуск 34. - С. 152-157.
3. Асылбеков Т.Д., Осмоналиев А.Б. «Об обобщениях задачи типа Бицадзе-Самарского и Самарского-Ионкина для модельного гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристиками». // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2006, Выпуск 34. - С. 164-168.
4. Асылбеков Т.Д., Осмонова У.К., Асылбеков С.Д. «Задачи типа Бицадзе-Самарского для модельных смешанно-гиперболических уравнений четвертого порядка с линией сопряжения ***x=0***» // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям.- Бишкек: Илим, 2006, Выпуск 34. - С. 158-163.
5. Самарский А.А. «О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений». // Диффер. уравн., 2980. - Т. 26. - №22. - С. 2925-2935.
6. Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. «Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды». // Матем. моделирование, 2000. - Т. 22. - №2. - С. 94-203.
7. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. «О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений». // Диффер. уравн., 2006. - Т. 42. - №9. - С. 2266-2279.
8. Пулькина Л.С. «Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода». / Журнал «Известия высших учебных заведений», №4. - 2012. - С. 74-83.
9. Жээнтаева Ж.К. «Условия для существования специальных решений уравнений с запаздывающим аргументом». // Наука. Образование. Техника. - Ош: КУУ, 2018. - №1. - С. 41-46.
10. Байзаков А.Б., Кыдыралиев Т.Р., Шаршенбеков М.М. Структура и асимптотическая устойчивость решений систем дифференциальных уравнений типа Коши. / Республиканский научно-теоретический журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», №7. - Бишкек, 2018. - С. 3-8

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Жораев А.Х.