

*Панков П.С., Акерова Дж.А.***СҮРҮЛҮҮ ТААСИР ЭТИЛҮҮЧҮ СИСТЕМАЛАРДА ЭНТРОПИЯНЫН
ӨСҮҮСҮНҮН МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛИ***Панков П.С., Акерова Дж.А.***МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЗРАСТАНИЯ ЭНТРОПИИ
В ПОЧТИ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМАХ С УПРУГОСТЬЮ***P.S. Pankov, Dzh.A. Akerova***MATHEMATICAL MODEL OF INCREASING OF ENTROPY IN
PERMANENTLY UNSTABLE SYSTEMS WITH ELASTITY**

УДК: 536.755

Физикада термодинамиканын экинчи закону обочолонгон системалар үчүн ачылган. Авторлордун биринчисинин катышуусу менен дээрлик обочолонгон, же башкарылуучу, же дайыма туруктуу эмес, же таасир этилүүчү системанын түшүндүгү киргизилди. Мындай системага абдан аз күч менен таасир кылуу ал системанын ички абалын маанилүү өзгөртө алат жана ар кандай аракеттерин туудура алат. (Ал өзгөрүүлөр жана аракеттер системанын ички энергиясынын эсебинен аткарылат). Термодинамиканын экинчи законун тактоонун негизинде буга чейин авторлор таасир этилүүчү системада материалдык чекитти сүрүлүүсүз жана сүрүлүүнүн негизинде кандайдыр бир аралыкка жылдырууда убакыттан көз каранды болгон энтропиянын өсүүсүнүн төмөнкү баасын алышкан. Бул макалада баштапкы чекитке кайтарылган итерип жибереүүдөгү кыймыл үчүн дифференциалдык теңдемелүү математикалык модел менен баалоо алынган.

Негизги сөздөр: энтропия, башкаруу, дифференциалдык теңдеме, таасир этилүүчү система, сүрүлүү, итерип жиберүү.

Второй закон термодинамики в физике был открыт для изолированных систем. С участием первого автора было введено понятие почти изолированной, или управляемой, или permanently unstable системы. Воздействие силой очень малой энергии на такую систему может существенно изменить внутреннее состояние этой системы и вызвать различные действия внутри системы. (Эти изменения и действия выполняются за счет внутренней энергии системы). На основе уточнения второго закона термодинамики, ранее авторами были получены оценки снизу для возрастания энтропии при передвижении материальной точки без трения и с трением на определенное расстояние в зависимости от времени в permanently unstable системах. В данной статье получены оценки для движения с возвратом в начальную точку с отталкиванием при помощи математической модели с дифференциальным уравнением.

Ключевые слова: энтропия, управление, дифференциальное уравнение, permanently unstable система, трение, отталкивание.

The second law of thermodynamic was opened for isolated systems. With participation of the first author the notion of almost isolated, or controlled, or permanently unstable, or affectable system was introduced. A small in energy influence on such system can sufficiently change the inner state of it and cause various actions. (These changes and actions are performed at the expense of inner energy of it.) As a specification of the second law of thermodynamic, earlier the authors derived estimations from below on increasing of entropy while motion of a material point both without friction and with friction over definite distance on depending on time in permanently unstable systems. Estimations for motion with returning to the initial point with repelling are obtained in this paper.

Key words: entropy, control, differential equation, permanently unstable system, friction, repelling.

Введение. Второй закон термодинамики (ниже - Закон-2) определяет знак изменения энтропии (ниже будем обозначать ее буквой H), но не определяет количественное изменение H (ниже ее математическую оценку будем обозначать $M-H$). Понятие «экономическая скорость» определяет минимальный расход топлива (т.е. минимальное увеличение $M-H$) на единицу длины пути. С учетом начала и конца движения появилось понятие «экологическое ралли» (например, второе экологическое ралли "Автоваз-2001") - в основном это – проехать заданный путь с минимальной затратой топлива.

Мы используем следующее определение (см. например [1]) (в нашей формулировке). С каждой системой, в которой происходят преобразования энергии (ниже будем обозначать ее буквой E), в

каждый момент времени можно связать некоторую переменную H (ее размерность - энергия / (абсолютная температура)). Эта переменная показывает, как разные виды E переходят в другие виды E необратимо, и наконец – в тепловую E . Для наших целей достаточно следующее выражение изменения H : $\Delta H = \sum \Delta Q / \Theta$, где ΔQ – количества переданной тепловой E или E , необратимо перешедшей в тепловую E (ниже - T - E), Θ – абсолютные температуры.

Также будем использовать обозначения: $[\cdot]$ – размерность физической величины, m - масса, L - длина.

Общепринятая гипотеза (Закон-2): в замкнутых системах M - H может только возрастать. Эта гипотеза обобщает известный факт, что тепло всегда передается от более теплого тела к менее теплому.

В данной статье получены оценки увеличения M - H для движения точки под действием притяжения с возвратом в начальную точку с отталкиванием от упругой и неупругой плоскости.

1. Определения и гипотезы. На основании [2], где найдена нижняя оценка увеличения M - H при обработке одного бита информации $\Delta H \geq k_b \Theta \ln 2$ (k_b - постоянная Больцмана), и замечания [3], которое в обобщенном виде мы поняли так: «чем быстрее какое-либо тело пройдет один и тот же путь в вязкой среде, тем больше энергии будет затрачено», в [4] нами были выдвинуты следующие гипотезы.

Пусть некоторая система, изолированная от внешнего мира (ниже - z -система), в данный момент находится в состоянии A , которое можно рассматривать как неподвижное, и есть возможность перехода в другое такое же состояние B (так мы обобщили задание на «экологическое ралли»).

Гипотеза 1. Для любой z -системы существует такой отрезок времени T_0 , зависящий только от состояний A и B , что для любого отрезка времени $T < T_0$ приращение ΔH в z -системе не может быть меньше некоторого положительного числа при любом способе перехода от состояния A к состоянию B за время T . Существует также такая константа C_0 , что

$$\Delta H \geq C_0 / T^2 \quad ([C_0] = [m][L]^2[\Theta]^{-1}).$$

По аналогии с известным термином мы назвали T_0 адиабатическим временем z -системы. Если исходить из принципа детерминизма, то z -система может в каждый момент времени переходить только в какое-либо одно следующее состояние. А в замечании [3] и Гипотезе 1 имеются в виду различные варианты переходов от состояния A к состоянию B и за разные отрезки времени. Поэтому мы предполагаем, что различные способы изменений внутри системы, переводящие ее из A в B , задаются некоторым внешним воздействием с достаточно малой E . Такое воздействие можно назвать «управлением», такую систему мы назвали «почти замкнутой» [5] (или управляемой, или по-английски *affectable*, по кыргызски - таасир этилүүчү), ниже - y -система.

Сформулируем также более узкую гипотезу. Пусть состояние A выражается в том, что в момент времени t_1 в y -системе некоторая материальная точка массы m (m -точка) неподвижна и состояние B выражается в том, что в момент времени $t_2 = t_1 + T$ точка также неподвижна и находится на расстоянии X от положения A .

Гипотеза 2. Для любой y -системы и любых начального и конечного положений точки существуют такие отрезок времени T_0 и такая константа G_0 , зависящие только от состояний A и B , что для любого $T < T_0$ приращение ΔH в y -системе не меньше $\Delta H \geq G_0 m X^2 / T^2$, размерность этой константы $([G_0] = [\Theta]^{-1})$.

В данной статье эта гипотеза подтверждается для движения в поле гравитации с отталкиванием от упругого тела. Получена оценка для коэффициента.

2. Постановка и решение задач. Предположим, что неподвижная m -точка находится на высоте h в гравитационном поле над абсолютно упругой плоскостью, она должна коснуться плоскости, вернуться в исходное положение и стать также неподвижной; можно при помощи управления задавать как

любое ускорение (за счет внутренней энергии y -системы), так любое торможение m -точки, и при торможении вся E переходит в тепло (в $T-E$) при почти неизменной температуре (теплоемкость среды достаточно велика).

Тогда получаем следующую задачу оптимального управления:

$$y''(t) = u(t)/m - g \quad (0 \leq t \leq T), \quad y(0) = h; y'(0) = 0; \quad y(T) = h, y'(T) = 0 \quad (1)$$

с дополнительным условием: существует такой момент времени $w \in (0, T)$, что $y(w) = 0$; $y'(w-0) > 0$; $y'(w+0) = -y'(w-0)$.

Мы можем внешним воздействием задавать силу $u(t)$ (предполагается кусочно-непрерывная функция), как для ускорения, так и для торможения, ее размерность $[u(t)] = [m][L]^2[T]^{-2}$.

Требуется минимизировать функционал, показывающий количество E , перешедшей в тепло (в $T-E$), то есть выделившейся при торможении.

Адиабатическое время y -системы (здесь - с нулевым приращением $M-H$) получается при $u(t) \equiv 0$: $T_0 = 2\sqrt{2h/g}$.

Очевидно, что для наиболее быстрого прохождения m -точки нужно придать ей наибольшую скорость в начальный момент, после чего положить $u(t) \equiv 0$.

Полагаем $y'(+0) = -v$, тогда $y(t) = h - vt - \frac{1}{2}gt^2$ ($y(t) > 0$).

Получаем уравнение $h - vw - \frac{1}{2}gw^2 = 0$, и в силу симметрии полагаем $w = T/2$, откуда $v = (h - gT^2/8)/w = 2(h - gT^2/8)/T$.

Кинетическая E m -точки в конце движения равна кинетической E m -точки в начале движения и она вся переходит в тепло, то есть является $T-E$. Таким образом, приращение $M-H$ пропорционально следующему выражению.

$$\Delta H \sim m(2(h - gT^2/8)/T)^2/2 = 2m((h - gT^2/8)/T)^2, T < 2\sqrt{2h/g}.$$

При стремлении $T \rightarrow 0$ получаем $\Delta H \sim 2mh^2/T^2$, что подтверждает Гипотезу 2.

Рассмотрим случай абсолютно неупругой плоскости. Вся E удара о плоскость переходит в тепло (является $T-E$), m -точка становится неподвижной.

Очевидно, что для наиболее быстрого прохождения m -точки всего пути нужно придать ей наибольшую скорость в начальный момент и в момент после удара, в остальные моменты времени $u(t) \equiv 0$.

Полагаем $y'(+0) = -v_1$, $y'(w+0) = v_2$, тогда $y(t) = h - v_1t - gt^2/2$ ($0 < t < w$),

$y(t) = v_2(t - w) - g(t - w)^2/2$ ($w < t < T$).

Получаем уравнения

$$h - v_1w - gw^2/2 = 0, v_2(T - w) - g(T - w)^2/2 = h. \quad (2)$$

Скорости m -точки сначала и после удара:

$$y'(w-0) = -v_1 - gw, y'(T-0) = v_2 - g(T-w),$$

при этом должно быть

$$v_2 - g(T-w) \geq 0. \quad (3)$$

Приращение $M-H$ после двух торможений

$$\Delta H \sim m(v_1 + gw)^2/2 + \frac{1}{2}m(v_2 - g(T-w))^2/2. \quad (4)$$

Решаем уравнение (2) относительно v_1 и v_2 и подставляем в (4) и (3):

$$\Delta H \sim m((h - gw^2/2)/w + gw)^2/2 + m((h + g(T - w)^2/2)/(T - w) - g(T - w))^2/2. \quad (5)$$

должно быть следующее неравенство

$$(h + g(T - w)^2/2)/(T - w) - g(T - w) \geq 0. \quad (6)$$

После преобразований и упрощений

$$\Delta H \sim m(((h + gw^2/2)/w)^2/2 + ((h - g(T - w)^2/2)/(T - w))^2), \quad (7)$$

должно быть

$$h - g(T - w)^2/2 \geq 0. \quad (8)$$

Вычисляя производную от правой части в (7) и заменяя $p = g/2$, получаем:

$$\Delta H'_w \sim m \left(\left(\frac{h + pw^2}{w} \right) \left(-\frac{h}{w^2} + p \right) + \left(\frac{h - p(T - w)^2}{(T - w)} \right) \left(-\frac{h}{(T - w)^2} - p \right) \right).$$

Это выражение обращается в ноль при $w = T/2$, отрицательно при w , близком к 0, и положительно при w , близком к T . Подставляя $w = T/2$ в (8), получаем $h - g(T - w)^2/2 = h - gT/8 \geq h - gT_0/8 = 0$.

Подставляя $w = T/2$ в (7), получаем, что, возможно, минимальное приращение

$$\begin{aligned} M-H \Delta H &\sim m(((h + pw^2)/w)^2 + ((h - pw^2)/w)^2)/2 = \\ &= m((h + pw^2)^2 + (h - pw^2)^2)/(2w^2) = 4m(h^2 + (pT^2/4)^2)/T^2. \end{aligned}$$

При $T \rightarrow 0$ получаем $\Delta H \sim 4mh^2/T^2$, что подтверждает Гипотезу 2.

Литература:

1. Мартин Н. Ингленд Дж. Математическая теория энтропии. - Москва: Мир, 1988. - 350 с.
2. Landauer R. Irreversibility and heat generation in the computing process // IBM Journal of Research and Development, vol. 5, 1961. - PP. 183-191.
3. Landauer R., Bennett C. H. The Fundamental Physical Limits of Computation // Scientific American, July. - New York, 1985. - PP. 48-56.
4. Панков П.С. Адиабатические показатели замкнутых систем // Вестник КНУ им.Ж.Баласагына. Серия 3. Естественно-технические науки. Физика и физическое образование, 2003. - С. 146-147.
5. Панков П., Баячорова Б., Жураев М. Кыргыз тилин компьютерде ча-гылдыруу. - Бишкек: Турар, 2010. - 172 б.
6. Pankov P., Akerova Dzh. Minimization in mathematical model of increment entropy in almost closed systems // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014) / Ed. Acad. A.Borubaev. - Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. - P. 252.
7. Кененбаева Г. М., Акерова Дж.А., Кененбаев Э. Математические модели для оценки приращения энтропии // Тезисы докладов II Борубаевских чтений (г. Бишкек, 1 марта 2018 года). - Бишкек: Кыргызское математическое общество, 2018.
8. Панков П.С., Акерова Дж.А. Дифференциальные уравнения с управлением в модели возрастания энтропии в почти замкнутых системах с трением // Вестник Института математики НАН КР, 2018. - №1. - С. 23-30.