DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 12, 2019

Орозов М.О.

БУРУЛУУ ЧЕКИТИНЕ ЭЭ БОЛГОН БИРИНЧИ ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН АСИМПТОТИКАЛЫК ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Орозов М.О.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

M.O. Orozov

ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A TURNING POINT

УДК: 517.928

Макалада кесиндинин сол чек-арасында бурулуу чекиттине ээ болгон сингулярдык козголгон экинчи тартиптеги, сызыктуу, бир тектүү эмес эки мүчөлүү кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн кесиндиде эки чекиттүү чектик маселенин чечиминин толук асимптотикалык ажыралмасы тургузулду. Асимптотикалык ажыралма жаңы ыкма менен тургузулду, себеби каралып жаткан бисингулярдуу маселеге түздөн-түз классикалык чек аралык функциялар методун колдонууга болбойт. Ал эми Ван-Дайктын жалгаштыруу методу менен тургузууга болот, бирок эсептөөлөр өтө татаал болуп, калдык мүчөнү баалоодо дагы кошумча маселе пайда болот. Биз сунуштап жаткан ыкмада калдык мүчөнү баалоодо максимум принцибин колдонууга шарт түзүлөт. Макалада асимптотикалык ажыралманын калдык мүчөсүн баалоодо максимум принцибин колдонулуп так баа алынды. Тургузулган ажыралма Эрдейдин аныктамасы боюнча асимптотикалык катар боло алат.

Негизги сөздөр: *асимптотика, кичине параметр, бурулуу чекити, дифференциалдык теңдеме, бисингулярдык маселе, биринчи чектик маселе, асимптотикалык чыгарылыш, асимптотикалык ажыралма.*

В статье построено полное асимптотическое разложение решения двухточечной краевой задачи на отрезке для сингулярно возмущенного, линейного, неоднородного двучленного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с точкой поворота на левом границе отрезка. Асимптотическое разложение решения построено новым подходом, так как напрямую применять классический метод пограничных функций для рассматриваемой задачи невозможно. Методом сращивания Ван-Дайка можно построить асимптотическое разложение рассматриваемой задачи, но вычисления сравнительно сложные и появляется дополнительная задача для оценки остаточного члена разложения. В предложенной нами методе создается условие для применения принципа максимума при оценке остаточного члена. В статье, при оценке остаточного члена асимптотического разложения, применяя принцип максимума, получена точная асимптотическая оценка. Построенное разложение является асимптотическим в смысле Эрдей.

Ключевые слова*: асимптотика, малый параметр, точка поворота, дифференциальное уравнение, бисингулярная задача, первая краевая задача, асимптотическое решение, асимптотическое разложение.*

In paper full asymptotic expansion of solution of the first boundary value problem on the segment for singular perturbed, linear, non homogeneous, ordinary differential equation of the second order with turning point at the boundary of the segment is constructed. The asymptotic expansion of the solution is constructed by a new approach, since it is impossible to directly apply the classical method of boundary functions for the problem under consideration. Using the Van Dyke splicing method, one can construct an asymptotic expansion of the problem under consideration, but the calculations are relatively complicated and an additional problem appears for estimating the remainder of the expansion. In our proposed method, a condition is created for applying the maximum principle in estimating the remainder term. In the article, when estimating the remainder term of the asymptotic expansion, applying the maximum principle, an exact asymptotic estimate is obtained. The resulting solutions are asymptotic in the sense of Erdelyi.

Key words*: asymptotics, small parameter, turning point, differential equation, bisingularly problem, first boundary value problem, asymptotic solution, asymptotic expansion.*

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для сингулярно возмущенного линейного неоднородного двучленного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с простой точкой поворота на левом границе отрезка

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$\varepsilon u''_{\varepsilon}(x)-xq(x)u_{\varepsilon}(x)=f_{\varepsilon}(x),\quad x\in(0,1), \tag{1}$$

$$u_{\varepsilon}(0)=0,\ u_{\varepsilon}(1)=0, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon<<1,\ q(x)>q_0=const>0\quad x\in[0,1],\ f_{\varepsilon}(0)\neq 0,\ q\in C^{\infty}[0,1],\ q(x),\ f_{\varepsilon}(x)$ – заданные функции, $u_{\varepsilon}(x)$ – искомая функция.

Многих исследователей интересует поведение решения рассматриваемой задачи (1), (2) когда малый параметр ε стремится к нулю [1,2].

Отметим, что задача (1), (2), методом сращивания, исследована в [3].

В данной статье асимптотика решения двухточечной краевой задачи строится модифицированным методом пограничных функций, предложенной в работах[4]-[9].

Согласно методу, решение задачи (1), (2) ищется в виде

$$u_{\varepsilon}(x)=V_{\varepsilon}(x)+W_{\mu}(\tau)+Q_{\lambda}(\eta), \tag{3}$$

где $V_{\varepsilon}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)$ – регуляризованное, т.е. гладкое внешнее решение [4], [8], $W_{\mu}(\tau)=\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k w_k(\tau)$ – пограничная функция, не классическая погранфункция, здесь $\tau=x/\mu,\ \varepsilon=\mu^3$,

$Q_{\lambda}(\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\pi_k(\eta)$ – классическая погранфункция [1], [2], здесь $\eta=(1-x)/\lambda,\ \varepsilon=\lambda^2$.

Из краевых условий (2) записываем следующие соотношения:

$$W_{\mu}(0)=-V_{\mu}(0), Q_{\lambda}(0)=\psi_{\lambda},\ \psi_{\lambda}=-V_{\lambda}(1)-W_{\lambda}(1/\mu). \tag{4}$$

Учитывая соотношение (3) двухчленное дифференциальное уравнение (1) можно разбить на следующие уравнения:

$$\varepsilon V''_{\varepsilon}(x)-xq(x)V_{\varepsilon}(x)=f_{\varepsilon}(x)-h_{\varepsilon}(x), \tag{5}$$

$$\mu W_{\mu}''(\tau)-\mu\tau q(\tau\mu)W_{\mu}(\tau)=h_{\mu}(\mu\tau),\quad \tau\in(0,\mu^{-1}), \tag{6}$$

$$Q_{\lambda}''(\eta)-(1-\eta\lambda)q(1-\eta\lambda)Q_{\lambda}(\eta)=0,\ \ \eta\in(0,\lambda^{-1}). \tag{7}$$

Если заметили мы в (5) и (6) ввели функцию $h_{\varepsilon}(x)$. Функция $h_{\varepsilon}(x)$ пока неопределенная функция, она определяется так чтобы функция $V_{\varepsilon}(x)$ была достаточно гладкой.

Так как $V_{\varepsilon}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)$, поэтому из (5) получаем:

$$v_0(x)=-\frac{f_0(x)-h_0(x)}{xq(x)},\qquad v_k(x)=\frac{f_k(x)-v''_{k-1}(x)-h_k(x)}{xq(x)},\ k\in\mathbf{N}.$$

Для того чтобы было $v_k\in C^{\infty}[0,1]$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$h_0(x)=\frac{g_0(0)}{q(0)}q(x),\ h_k(x)=g_k(0)+x\sum_{j=0}^{\infty}h_{k,j}x^j,\quad k\in\mathbf{N},$$

$g_k(x)=f_k(x)-v''_{k-1}(x),\ k\in\mathbf{N_0},\ v_{-1}(x)\equiv 0$, тогда $v_k\in C^{\infty}[0,1]$, когда

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

где $g_k(x)=f_k(x)-v''_{k-1}(x), k\in N_0, v_{-1}(x)\equiv 0,$ постоянные h_{kj} конкретизируются ниже.

При выполнении этих условий, имеем следующие соотношения:

$$v_0(x)=-\frac{g_0(x)-\dfrac{g_0(0)}{q(0)}q(x)}{xq(x)}, \qquad v_k(x)=-\frac{g_k(x)-g_k(0)}{xq(x)}+\frac{1}{q(x)}\sum_{j=0}^{\infty}h_{k,j}x^j.$$

Дифференциальное уравнение (6) запишем в виде:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(w''_{k-1}(\tau)-\tau q_0 w_{k-1}(\tau)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\sum_{j=1}^{k}\tau^{j+1}q_j w_{k-j-1}(\tau)+g_0(0)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_j}{q_0}\tau^j\mu^j+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(0)\mu^{3k}+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{3k}\sum_{j=0}^{\infty}h_{k,j}\left(\mu\tau\right)^{j+1}.$$

Далее имеем:

$$Lw_{-1}\equiv w_{-1}''(\tau)-\tau q_0 w_{-1}(\tau)=g_0(0),\quad \tau\in(0,\mu^{-1}),$$
$$Lw_{3k+s}=\tilde{p}_{3k+s}(\tau),\ s=0,1,2;\ k\in N_0,\quad \tau\in(0,\mu^{-1}),$$

где

$$p_{3k+m}(\tau)=\tilde{p}_{3k+m}(\tau)+\sum_{j=0}^{k-1}h_{k-j,3j+m}\tau^{3j+1+m},\ m=0,1,$$

$$p_{3k+2}(\tau)=\tilde{p}_{3k+2}(\tau)+g_{k+1}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}h_{k-j,3j+2}\tau^{3j+3},\ \ \tilde{p}_s(\tau)=\sum_{j=1}^{s+1}\tau^{j+1}q_j w_{s-j}+\frac{g_0(0)}{q_0}q_{s+1}\tau^{s+1},$$

Первое равенство в (4) порождает следующие начальные условия

$$w_{3k-1}(0)=w_{3k+1}(0)=0,\ w_{3k}(0)=-v_k(0),\ k\in N_0.$$

И здесь определим неизвестные постоянные h_{kj}: $h_{k,j}=-\sum_{s=1}^{3k+1}q_{s+j}w_{3k-s,s}$. Отсюда следует справедливость разложения

$$w_{3k+s}(\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_{3k+s,3j-s}}{\tau^{3j-s}},\ \tau\to\infty,\ s=0,1,2,\ k=-1,0,1,...$$

Теперь перейдем к определению $\pi_k(\eta)$. Однородное дифференциальное уравнение (7) запишем в виде

$$Q_\lambda''(\eta)-(1-\eta\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\eta\lambda\right)^j\tilde{q}_j Q_\lambda(\eta)=0,\ \ \eta\in(0,\lambda^{-1}).$$

Учитывая, второе равенство (4) и $Q_\lambda(\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\pi_k(\eta)$ получим

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\left(\pi''_k(\eta)-\tilde{q}_0\,\pi_k(\eta)\right)=\sum_{j=0}^{k-1}\eta^{j+1}\left(\tilde{q}_{j+1}-\tilde{q}_j\right)\pi_{k-j-1}(\eta)),\ \eta\in(0,\lambda^{-1}),\tag{8}$$

$$\pi_{2m}(0)=\psi_m,\ \pi_{2m+1}(0)=0,\ m\in N_0.$$

Пограничные функции должны исчезать вне пограничного слоя, поэтому потребуем выполнение условий: $\lim\limits_{\eta\to+\infty}\pi_m(\eta)=0, m\in N_0$.

Отсюда получим следующие краевые задачи:

$$l\pi_0\equiv\pi''_0(\eta)-\tilde{q}_0\pi_0(\eta)=0,\ \pi_0(0)=\psi_0,\ \lim_{\eta\to+\infty}\pi_0(\eta)=0;$$

$$l\pi_1=\eta\left(\tilde{q}_1-\tilde{q}_0\right)\pi_0(\eta),\ \pi_1(0)=0,\ \lim_{\eta\to+\infty}\pi_1(\eta)=0;$$

$$l\pi_k=\sum_{j=0}^{k-1}\eta^{j+1}\left(\tilde{q}_{j+1}-\tilde{q}_j\right)\pi_{k-j-1}(\eta),$$

$$\pi_k(0)=\begin{cases}\psi_m\ \text{при}\,k=2m,\\ 0\ \text{при}\ k=2m+1, m\in\mathrm{N},\end{cases}\ \lim_{\eta\to+\infty}\pi_k(\eta)=0,\ k=2,3,\ldots$$

Эти задачи имеют единственные решения, [8,9]:

$$\pi_0(\eta)=\psi_0 e^{-\eta\sqrt{\tilde{q}_0}},\qquad \pi_1(\eta)=\left(\eta^2c_{1,2}+\eta c_{1,1}\right)e^{-\eta\sqrt{\tilde{q}_0}},$$

$$\pi_{2k}(\eta)=e^{-\eta\sqrt{\tilde{q}_0}}\left(\psi_k+\sum_{j=1}^{4k}\eta^j c_{2k,j}\right),$$

$$\pi_{2k+1}(\eta)=e^{-\eta\sqrt{\tilde{q}_0}}\sum_{j=1}^{4k+2}\eta^j c_{2k+1,j},\quad k\in N,\ т.е.\ \ \pi_k(\eta)=O\left(e^{-\eta}\right),\ \eta\to\infty,$$

где $\pi_k(\eta)\in C^\infty[0,\infty),\ k\in N_0,\ c_{kj}-$ некоторые постоянные.

Следовательно,

$$Q_\lambda(\eta)=e^{-\eta\sqrt{\tilde{q}_0}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{2k}\left(\psi_k+\sum_{j=1}^{4k}\eta^j c_{2k,j}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{2k+1}\sum_{j=1}^{4k+2}\eta^j c_{2k+1,j}\right).$$

Пусть $u_\varepsilon(x)=u_{\varepsilon,m}(x)+R_{\varepsilon,m}(x),$

где $u_{\varepsilon,m}(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}\varepsilon^k v_k(x)+\sum\limits_{k=0}^{2m+1}\lambda^k\pi_k(\eta)+\sum\limits_{k=-1}^{3m+1}\mu^k w_k(\tau)$, $R_{\varepsilon,m}(x)$ – остаток ряда (3).

Относительно $R_{\varepsilon,m}(x)$ получится краевая задача

$$\varepsilon R''_{\varepsilon,m}(x)-xq(x)R_{\varepsilon,m}(x)=\varepsilon^{m+1}\Phi_\varepsilon(x),\ x\in(0,1),\ \ R_{\varepsilon,m}(0)=O\left(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\right),\ \varepsilon\to0,\ R_{\varepsilon,m}(1)=0,$$

где $\Phi_\varepsilon(x)=O(1)$ при $\varepsilon\to0,\ x\in[0,1].$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Применяя принцип максимума [8,10], получаем:

$$R_{\varepsilon,m}(x)=O\left(\varepsilon^m\right),\ \varepsilon\to 0,\ x\in[0,1].$$

Мы доказали следующую теорему

Теорема. Решение двухточечной краевой задачи (1), (2) можно представить в виде

$$u_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{2m}\sqrt{\varepsilon^k}\pi_k(\eta)+\sum_{k=-1}^{3m}\sqrt[3]{\varepsilon^k}w_k(\tau)+O\left(\varepsilon^m\right),\ \varepsilon\to 0,$$

где $v_k\in C^\infty[0,1],\ w_k,\pi_k\in C^\infty[0,\infty),\ \tau=x/\sqrt[3]{\varepsilon},\ \eta=(1-x)/\sqrt{\varepsilon}.$

Литература:

1. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра [Текст] / А.Н. Тихонов // Математический сборник. - 1948. - Т. 22 (64). - С. 193-204.
2. Треногин В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника-Вишика [Текст] / В.А. Треногин // Успехи математических наук. - 1970. - Т. 25. Вып. 4. - С. 123-156.
3. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. - М.: ФИЗМАТЛИТ. - 2009. - 248 с.
4. Alymkulov K., Tursunov D.A. “PerturbationTheory” (Perturbed differential equations with singularly points). Dimo I, Uzunov, 2017, INTECH Open, London, UK.
5. Турсунов Д.А., Кожобеков К.Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота // Известия Иркутского госуниверситета. Серия «Математика». - 2017. - Т. 21. - С. 108-121.
6. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. - 2016. - №1(39). - С. 42-52.
7. Турсунов Д.А. Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости “быстрых движений” // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. - Томск, 2018. - №4 (54). - С. 46-57.
8. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота // Труды ИММ УрО РАН. - Москва, 2016. - Т. 22. - №1. - С. 271-281.
9. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. - 2019. - Т. 29. Вып. 3. - С. 332-340.
10. Murray H. Protter and Hans F. Weinberger Maximum Principles in Differential Equations: Springer-Verlag, New York Inc. 1984.