

*Кененбаева Г.М., Жаналиева Ж.Р.***ТЕНДЕМЕЛЕРДИН КАТЕГОРИЯСЫ ЖАНА БИЛИМДИ
БААЛООҮЧҮН АНЫ КОЛДОНУУ***Кененбаева Г.М., Жаналиева Ж.Р.***КАТЕГОРИЯ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ
ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ***G.M. Kenenbaeva, Zh.R. Zhanalieva***CATEGORY OF EQUATIONS, TO USE IT TO
ESTIMATE KNOWLEDGE**

УДК: 512.581+371.263

Өзгөртүүлөрдө чыгарылышты сактоо принцибинин негизинде «предикат» түшүнүгүнүн жардамы менен теңдемелердин жаңы жалпы түшүнүгүн киргизгенбиз жана теңдемелердин категориясынын, параметрлүү теңдемелердин категориясынын, корректтүү теңдемелердин категориясынын негиздерин түзгөнбүз. Ошондой эле, биздин катышуубуз менен математика боюнча тапшырмаларды кокусунан түзүү ыкмасы иштелип чыккан, компьютерде жүзөгө ашырылган жана дал келген «түзүүчүлүк», «сейректик», «толук сырдуулук» принциптери, мультимедиялуу маселелер, сырттан маалыматты алган маселелер ж.у.б. сунуш кылынган. Бул макаланын максаты: студенттердин билимин автоматтык контролдоо үчүн теңдемелер категориясынын камтылган категориясын тургузуу. Макалада тапшырмалардын чыгарылыштарын текшерүү үчүн ыңгайлуу бүтүн сандуу теңдемелердин категориясынын негиздери түзүлөт. Кааалаган маселени бүтүн сандуу маселени келтирүүнүн ыкмалары сунуш кылынат, мисалдар катары квадраттык, кубдук теңдемелер, прогрессиялар, аныктагычтар, сызыктуу алгебралык теңдемелер системалары каралат.

Негизги сөздөр: категория, теңдеме, билимди баалоо, маселе, чыгарылыш.

Ранее нами было введено новое общее понятие уравнения с помощью понятия «предикат» на основе принципа сохранения решения при преобразованиях и построены элементы категории уравнений, категории уравнений с параметрами, категории корректных уравнений. Также с нашим участием была развита методика случайного формирования заданий по математике, предложены соответствующие принципы «формируемости», «уникальности», «полной конфиденциальности», мультимедийные задачи, задачи с получением информации извне и т.д. Цель статьи: построение подкатегории категории уравнений для автоматического контроля знаний студентов. В статье построены элементы категории уравнений с целыми числами, удобной для проверки решений заданий. Предложены приемы приведения различных задач к задачам с целыми числами, в качестве примеров рассмотрены квадратные, кубические уравнения, прогрессии, определители, системы линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: категория, уравнение, оценка знаний, задача, решение.

A new general notion of equation was introduced by us with assistance of the notion «predicate» on the base of the principle of preservation of solution while transformations and elements of the category of equations, of the category of equations with parameters, of the category of correct equations were constructed. Also, a method to generate tasks randomly was developed and principles of generativity, uniqueness and complete confidentiality, multimedia tasks, tasks with receiving information from without etc. were proposed with our participation. The aim of this paper is to construct a subcategory of the category of equations for automatic control of students' knowledge. Elements of the category of equations with integer numbers which is convenient to check up solutions of tasks are built in the paper. Techniques to reduce any task to a task with integer numbers are proposed, square and cubic equations, arithmetic progression, determinants, systems of linear algebraic equations are considered as examples.

Key words: category, equation, estimation of knowledge, task, solution.

Введение. Термин *категория* в смысле оснований математики был введен в [1]. Их теория возникла из того, что «соединение, сочетание» всех множеств не является множеством – это приводит к противоречиям. Условно говорится, что «оно слишком велико». То же относится и к «соединениям» преобразований множеств и другим «соединениям» в различных разделах математики.

Для дальнейшего рассмотрим категории, как некие математические понятия, принадлежащие Cat . Отметим, что Cat нельзя рассматривать ни как «категию», ни как «множество». В дальнейшем этот термин оказался удобным для изложения многих разделов математики, поскольку теория категорий рассматривает свойства отношений между математическими объектами (понятиями), не зависящие от внутренней структуры объектов. Категория для одного из видов уравнений была построена в [2].

Ранее нами было введено новое общее понятие **уравнения** с помощью понятия “предикат” на основе принципа сохранения решения при преобразованиях и построены элементы и аксиоматика для «уравнения» ($Equa \in Cat$), «уравнения с параметрами» ($Equa - Par \in Cat$), «корректного уравнения» ($Equa-Top \in Cat$), на основе известных «множества» ($Set \in Cat$) и «топологического пространства» ($Top \in Cat$) [3]-[4].

Также с нашим участием была развита методика случайного формирования заданий по математике ([5] и ряд наших последующих публикаций). Цель данной статьи: построить подкатегию $Equa-Par-Integer \in Cat$ внутри $Equa \in Cat$ для автоматического контроля знаний учащихся.

1. Известные сведения из теории категорий.

Определение 1. $K \in Cat$ задаётся

- 1) «Соединением» $A, B, C, \dots$ объектов $Ob(K)$;
- 2) «Соединением» $f, g, h, \dots$ морфизмов $Mor(K)$;
- 3) Операциями dom и cod , которые ставят в соответствие каждому морфизму f некоторые объекты $dom(f)$ и $cod(f)$ (то есть начало и конец f). То, что $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, изображается так $f : A \rightarrow B$. Это называется f – морфизм из A в B .
- 4) Операцией композиции, которая по каждой паре морфизмов f и g , таких, что $cod(f) = dom(g)$, создает некоторый морфизм $g \circ f : A \rightarrow C$.
- 5) Операцией I , которая по каждому объекту A некоторый морфизм $I_A : A \rightarrow A$ (то есть тождественный или единичный морфизм объекта A).

Совокупность всех морфизмов из A в B в $K \in Cat$ обозначается $K(A, B)$. При этом должно быть следующее:

1. Ассоциативность композиции. Для любой тройки морфизмов $f, g, h, f : A \rightarrow B; g : B \rightarrow C; h : C \rightarrow D$ выполнено равенство $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

2. Свойства тождества. Для любого морфизма $f : A \rightarrow B$ выполнены равенства $f \circ I_A = f, I_B \circ f = f$. Основными понятиями из Cat , из которых строятся все остальные, являются следующие:

«Множество» $Set \in Cat$. $Ob(Set)$ – непустые множества, $Mor(Set)$ – функции, отображающие одни множества в другие.

«Функция» $Func \in Cat$ (оператор, преобразование, отображение). $Ob(Func) = Mor(Set)$, $Mor(Func)$ – преобразования функций. В свою очередь, ее подкатегории используются в различных разделах математики.

«Топологическое пространство» $Top \in Cat$. $Ob(Top)$ – топологические пространства, $Mor(Top)$ – непрерывные отображения.

2. Построение категории уравнений.

Обычно уравнения подразделяются неформально на алгебраические (АУ), дифференциальные (ОДУ и ОДУ в ЧП), интегральные (ИУ типа Вольтерра или типа Фредгольма), с начальными или краевыми условиями и т.д. Нами был использован тот факт, что уравнения и системы уравнений различных типов эквивалентны. Более того, известный прием понижения порядка автономных ОДУ, различные методы подстановок и преобразований аргумента, развиваемый в Кыргызстане метод преобразования решений ОДУ и ОДУ в ЧП, созданные в Кыргызстане метод дополнительного аргумента для ОДУ в

ЧП, метод сведения ОДУ к системам операторно-разностных уравнений показали, что эквивалентными могут быть уравнения с различными решениями, и даже в различных пространствах. Поэтому мы расширили понятие «уравнение» с включением понятий «система уравнений», «уравнение с дополнительными условиями» для строгого и единообразного описания упомянутых методов и формулировки основных понятий, объектов и морфизмов «уравнения» $Equa \in Cat$ и ее подкатегорий, установление ее связей с другими категориями.

Определение 2. $Ob(Equa)$ - наборы {непустые множества X, Y , предикат $P(x)$ на X , преобразование $B: X \rightarrow Y$ }.

Р е ш е н и е м уравнения $\{X, Y, P, B\}$ называется такое $y \in Y$, что $(\exists x \in X)(P(x) \wedge (y = B(x)))$.

В частности, если B - тождественное отображение, то получаем только задачу решения уравнения " $P(x)$ ".

$Mor(Equa)$ – это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$, что решения (или их отсутствие) сохраняются.

Также мы определили некоторые подкатегории для $Equa \in Cat$.

Для «уравнения с параметрами» $Equa-Par \subset Equa \in Cat$ мы предложили

Определение 3. $Ob(Equa-Par)$ - наборы {непустые множества X, F, Y , предикат $P(x, f)$ на $X \times F$, преобразование $B: X \rightarrow Y$ }.

Решением уравнения $\{X, F, Y, P, B\}$ для любого $f \in F$ названо такое $y(f) \in Y$, что $(\exists x \in X)(P(x, f) \wedge (y = B(x)))$. В частности, если B – тождественное преобразование, то получаем только задачу решения уравнения " $P(x, y)$ ".

$Mor(Equa-Par)$ – это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$ (кроме F), что решения (или их отсутствие) сохраняются.

3. Построение категории уравнений с целыми числами.

Построим $Equa-Par-Integer \subset Equa-Par \in Cat$ (Определение 3) условием, что F - множество целых чисел или целочисленных векторов в некоторых диапазонах, Y - множество целых чисел.

Ограничения на F дают возможность построения задач с помощью датчика случайных чисел (или псевдослучайных чисел с использованием личных данных участника соревнования или экзаменуемого), ограничение на Y дает ему/ей возможность однозначного и единообразного ввода ответов.

При этом преобразование B – это приведение любого объекта, который считается «решением» «уравнения» в данном разделе математики, к целому числу.

4. Примеры обобщенных задач в категорном представлении.

Основные приемы для получения ответа в виде целого числа:

- свертка нескольких компонент математического объекта в одно число;
- округление дробного числа или вещественного числа до целого числа;
- замена искомой функции ее значением в некоторой точке (проекция множества функций на множество чисел);
- в более общем виде: замена объекта его числовой характеристикой (площадь, объем, диаметр, периметр ...).

Пример 4.1. Решить AV , сводящееся к квадратному, с нецелыми корнями».

Алгоритм: $U \in 5..10$; $V \in 11..15$; $N \in 1..4$; Вычислить $B = 2U + 2V + 1$; $C = (2U + 1)V$.

Задача: Если $N = 1$, то

«Найти удвоенную разность большего и меньшего корней уравнения $X(2X - B) + C = 0$ »;

В категорном виде:

$$P(X_1, X_2, B, C) = "X_1(2X_1 - B) + C = 0" \wedge "X_2(2X_2 - B) + C = 0" \wedge X_1 < X_2;$$

$$B(X_1, X_2) = 2(X_2 - X_1).$$

Если $N=2$, то

«Найти разность большего и меньшего корней уравнения $X(2X - B) = -C$ »;

Если $N=3$, то

«Найти разность большего и меньшего корней уравнения $2X^2 + C = BX$ »;

Если $N=4$, то

«Найти разность большего и меньшего корней уравнения $2X + C/X = B$ ».

Ответ: $Y = 2V - 2U - 1$.

Пр и м е р 4.2. Решить приближенно AV третьей степени с одним корнем.

Алгоритм: $P \in 2..5$; $Q \in 3..10$; Вычислить $B = 2P + 1$; $C = 2Q + 1$.

Задача:

«Решить уравнение $X(X^2 + B) = C$ и округлить его до целого числа C недостатком».

[Уравнение составлено так, что решение – единственное и не целое].

Пр и м е р 4.3. Найти сумму членов арифметической прогрессии, если даны ее четыре первых члена и последний член.

Алгоритм: $P \in 3..5$, $Q \in 2..9$, $W \in 100..200$; Вычислить

$$A = P + Q; B = A + Q; C = B + Q, D = P + (W-1)*Q.$$

Задача. «Найти сумму членов арифметической прогрессии

$$P + A + B + C + \dots + D.»$$

Здесь $P(X, P, A, D) = "P + (X - 1) * (A - P) = D"$.

Ответ: $Y = (P + D) * X / 2$.

Пр и м е р 4.4. Действия с обыкновенными дробями

Алгоритм: $Q \in 10..20$; $U \in 1000..2000$; $V \in 6..10$, $B = (2*Q+1)*V$, $A = 2*U+1$.

Задача: «Записать число $(A+(V/B))/2$ в виде неправильной дроби с минимальным знаменателем и найти сумму: целая часть + числитель + знаменатель».

Ответ: $U+3*Q+2$.

Пр и м е р 4.5. Вычислить определитель третьего или четвертого порядка.

Алгоритм (неформально). Составляем случайную треугольную матрицу, диагональные элементы которой – ненулевые. Тогда ее определитель равен произведению диагональных элементов. Потом несколько раз прибавляем к строкам другие строки, и так же – к столбцам столбцы, от этого значение определителя не меняется. Таким образом, можно не программировать вычисление определителя.

Пример 4.6. «Решить систему трех линейных AV с тремя неизвестными и найти сумму компонент решения».

Алгоритм (неформально). По методу Примера 4.5 составляем случайную невырожденную 3×3 -матрицу, выбираем случайные значения неизвестных и по ним и матрице коэффициентов вычисляем свободные члены. Ответ равен сумме значений неизвестных.

Таким образом, можно не программировать какой-либо способ решения таких систем.

Пример 4.7. Техника дифференцирования.

Алгоритм: $P \in 2..5$; $Q \in 3..10$; $M \in 5..9$; $N \in 2..5$.

Задача: «Вычислить производную функции $\exp(Q(X - P)) + M \cdot X^N$ при $X = P$ ».

Ответ: $Q + M \cdot N \cdot P^{N-1}$.

Литература:

1. Eilenberg S., MacLane S. A general theory of natural equivalences. // Transactions of American Mathematical Society, 1945, 58: pp. 231-294.
2. Rosický J. Equational categories // Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, vol. 22, no. 1, 1981. - Pp.85-95.
3. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л., Бейшебаева Ж.К., Маматжан уулу Э. Элементы категории уравнений // Вестник Института математики НАН КР. – 2018. - №1. - С. 88-95.
4. Kenenbaeva G.M., Askar kyzy L. Foundations of category of equations // Тезисы докладов Международной научной конференции «III Борубаевские чтения», посвященной 35-летию со дня образования Института математики НАН КР. - Бишкек: Институт математики, 2019. - С. 46.
5. Панков П.С., Джаналиева Ж.Р. Опыт и перспективы использования комплекса UNIQTEST уникальных тестовых заданий в учебном процессе // Образование и наука в новом геополитическом пространстве: Тез. докл. научно-практической конф. - Бишкек: МУК, 1995. - С. 217.