

*Жораев А.Х.***КИНЕМАТИКАЛЫК МЕЙКИНДИКТЕРДЕ КЫЙМЫЛДООГО
НЕГИЗДЕЛГЕН ЧЕНЕМДИН АНЫКТАМАСЫ***Жораев А.Х.***ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ОСНОВАННОЕ НА ДВИЖЕНИИ
В КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ***A.Kh. Zhoraev***DEFINITION OF DIMENSION BASED ON MOTION
IN KINEMATICAL SPACES**

УДК: 515.122

Мурда «кинематикалык мейкиндик» түшүнүгү киргизилген, метрикалык мейкиндикти кинематикалаштыруучулугунун шарттары табылган. Кинематикалык мейкиндиктерде «чекиттин кыймылдоосу» жана татаал объекттердин кыймылдоосунун теориясы иштеп чыгарылды. Берилген функциялары аналитикалык болгон алгебралык жана дифференциалдык теңдемелер аныктаган Риман беттерин кинематикалаштыруу далилдени. Кээ бир кинематикалык мейкиндиктерде чекиттин башкарылган кыймылдоосу компьютерде жүзөгө ашырылды. Топологиялык мейкиндиктердин ченеминин мурда белгилүү аныктамалары «жабуулар» жана «бөлүп койгон тосмо» түшүнүктөрүнүн негизинде берилди. Биз «татаал объекттердин кыймылдоосу» түшүнүгүнүн негизинде мейкиндиктин ченеминин аныктамасын жана туюк туурасынын аныктамасын бердик. Мейкиндикте бир кесиндини айландыруу аркылуу эки ченемдүү мейкиндиктин аныктамасы берилет, эки ченемдүү көптүктү айландыруу аркылуу үч ченемдүү мейкиндиктин аныктамасы берилет, ж.у.с. мейкиндиктин каалаган ориентациялык ченеми үчүн аныктамасы берилет.

Негизги сөздөр: ченем, топологиялык мейкиндик, кинематикалык мейкиндик, кыймылдоо, башкарылган кыймылдоо.

Ранее было введено понятие «кинематическое пространство», получены условия кинематизируемости метрических пространств, доказана кинематизируемость римановых поверхностей, определенных алгебраическими и дифференциальными уравнениями с аналитическими заданными функциями. Разработана теория «движения точки» и «движения сложного объекта» в кинематическом пространстве. Управляемое движение точки в некоторых кинематических пространствах было реализовано на компьютере. Ранее известные определения размерности топологических пространств использовали понятия «покрытий», «разделяющих перегородок». Нами предложены определения размерности кинематических пространств и сплошной ширины таких пространств на основе понятия «движение сложных объектов». Через вращение отрезка в пространстве дается определение двумерного пространства, через вращение двумерного множества – определение трехмерного пространства и т.д. даются определения для любой ориентационной размерности пространства.

Ключевые слова: размерность, топологическое пространство, кинематическое пространство, движение, управляемое движение.

Supra the notion of kinematical space was introduced, conditions of kinematizivity of metric spaces were obtained. A theory of motion of a point and of motion of a complex object in kinematical spaces was developed. A kinematizivity of Riemann surfaces defined by algebraic equations and differential equations with analytical functions was proven. In the frames of developing the theory of kinematical spaces, the definition of dimension of such spaces is introduced. A controlled motion of a point in some kinematical spaces was implemented on a computer. Supra known definitions of dimension of topological spaces were based on conceptions of coverings and separating partitions. We proposed definitions based on a conception of compound motion. The definition of two-dimensional space is given by means of rotation of a segment; one of three-dimensional space is given by means of rotation of a two-dimensional set, etc. for any orientational dimension of a space.

Key words: dimension, topological space, kinematical space, motion, controlled motion.

Введение. Ранее известные определения размерности топологических пространств (ниже - т-пространств) использовали понятия «покрытий», «разделяющих перегородок». В [1] было введено понятие естественного движения (для одной точки) в т-пространстве. Оно дало возможность определить, например, связность - возможность перехода от любой точки к любой другой. Оно также дало возмож-

ность представить в виде компьютерных программ с обратной связью различные известные в математике пространства, не являющиеся эвклидовыми [2], [3]. Также было введено понятие неоднородного т-пространства [4]. С использованием движения более сложных объектов нами [7] предложены новые понятия «сплошной ширины» т-пространства и «ориентационной размерности» т-пространства.

В настоящей работе эти определения уточняются. Приведены примеры.

Используем обозначения $R:=(−∞, ∞)$; $R_+:=[0, ∞)$; $R_{++}:(0, ∞)$. Ниже открытое множество обозначается, как о-множество, открытое покрытие - как о-покрытие.

2. Обзор известных фактов и определений.

Определение 1 [1] (в нашей формулировке). *Кинематическое пространство*, как частный случай метрического пространства, состоит из точек (множество G) и *маршрутов* (множество K). Каждый маршрут M , в свою очередь, состоит из положительного числа $T_M \in R_{++}$ (*время маршрута*) и функции m_M , определенной на отрезке $[0, T_M]$ и принимающей значения в G (*траектория маршрута*). Эти объекты должны удовлетворять аксиомам:

(K1) для любых двух различных точек ($\forall z_0 \neq z_1 \in G$) существует такой маршрут $M \in K$, что значения функции в начале и в конце отрезка $[0, T_M]$ являются данными точками: $m_M(0) = z_0$ и $m_M(T_M) = z_1$, и множество значений времен T_M для таких маршрутов M ограничено снизу в R_{++} , то есть передвижение между любыми двумя различными точками возможно - пространство линейно связно - но передвижение со сколь угодно малым временем невозможно.

(K2) Если $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$, то также существует маршрут с обратным движением: $\{T_M, m_M(T_M - t)\} \in K$.

(K3) Если $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$ и T^* – промежуточная точка отрезка $[0, T_M]$, то также существует маршрут с движением по той же траектории до момента времени T^* $\{T^*, m^*(t) \equiv m_M(t) (0 \leq t \leq T^*)\} \in K$.

Маршруты, существующие в силу этой аксиомы, называются *подмаршрутами* маршрута M .

(K4) Если есть два маршрута, начальная точка второго совпадает с конечной точкой первого: $\{T_1, m_1(t)\} \in K$, $\{T_2, m_2(t)\} \in K$ и $m_1(T_1) = m_2(0)$, то сочетание числа - суммы времен $T_{12} = T_1 + T_2$ и функции, определенной на отрезке $[0, T_1 + T_2]$: $m_{12}(t) = m_1(t) (0 \leq t < T_1)$; $m_{12}(t) = m_2(t - T_1) (T_1 \leq t \leq T_1 + T_2)$ также является маршрутом из множества K .

Кинематическое пространство будем коротко обозначать к-пространство.

Для любой функции – траектории маршрута $m_M: [0, T_M] \rightarrow G$ множество ее значений называется *линией*.

Определение 2. Если для метрического пространства (м-пространства) (X, ρ) существуют сколь угодно мелкие о-покрытия кратности $(n+1)$, то говорится, что *Dim-размерность* этого м-пространства не более n ; если также не существуют такие покрытия кратности n , то *Dim-размерность* равна n .

Определение 3. Замкнутое (з-)множество C называется *перегородкой* между множествами A и B , имеющими пустое пересечение, в т-пространстве X , если о-множество $X \setminus C$ есть объединение двух о-множеств A_1 и B_1 , имеющих пустое пересечение и содержащих о-множества A и B соответственно.

Ind-размерность определяется по индукции. *Ind-размерность* множества $\emptyset$ равна (-1) . Если для любых двух з-множеств т-пространства X , имеющих пустое пересечение, существует перегородка с *Ind-размерностью* не более $(n-1)$, то говорится, что *Ind-размерность* X не более n ; если неверно, что "*Ind-размерность* т-пространства X не более $(n-1)$ ", то *Ind-размерность* X равна n .

Для м-пространств эти два определения эквивалентны.

Определение 4 [4] (в нашей формулировке). Если две точки т-пространства имеют окрестности, которые можно непрерывно преобразовать одну в другую и обратно, то они называются *локально эквивалентными*.

Таким образом, т-пространство распадается на подпространства, каждое из которых содержит

локально эквивалентные между собой точки. Если таких подпространств больше одного, то t -пространство называется *локально неоднородным*.

Нами предложены [7]

Определение 5. Пусть заданы отрезок $[0, T] \subset \mathbf{R}_+$ и некоторое множество P в t -пространстве G . *Движением* множества P называется такое непрерывное отображение (н-отображение) $F: P \times [0, T] \rightarrow G$, что для любого $t \in [0, T]$ сужение отображения $F(z, t): P \rightarrow G$ является взаимно однозначным и образ $F(P, t)$ эквивалентен множеству P в топологическом смысле.

Мы будем применять это определение для связных множеств P .

Для подклассов класса t -пространств соответственно выражение «в топологическом смысле» заменяется на выражение «в смысле соответствующего пространства».

Для большей гибкости для m -пространств нами было предложено

Определение 6. Если существует биективное отображение $f: A \rightarrow B$ такое, что $\rho_B(f(x), f(y)) \in [\alpha, \beta]$, $\rho_A(x, y) \in [\alpha, \beta]$ и $\rho_A(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \in [\alpha, \beta]$, $\rho_B(x, y) \in [\alpha, \beta]$, то два ограниченных m -пространства (или два множества m -пространства) A и B называются $[\alpha, \beta]$ -подобными ($0 < \alpha < 1 < \beta$),

Соответственно, в m -пространстве нами введено понятие *обобщенное движение с сохранением $[\alpha, \beta]$ -подобия*.

Определение 7 *обобщенного поворота с изменением ориентации*. Так нами названо н-отображение (движение) $F: P \times [0, T] \rightarrow G$, если существует такое подмножество $C \subset P$, что

1) $(t \in [0, T])(z \in C) \Rightarrow (F(z, t) \equiv z)$;

2) $(t \in [0, T])(z \in P \setminus C) \Rightarrow$ (сужение $F: \{z\} \times [0, T] \rightarrow G$ будет траекторией для маршрута без самопересечений (Определение 1) с начальной точкой z);

3) $(t_1, t_2 \in [0, T])(z_1 \neq z_2 \in P) \Rightarrow (F(z_1, t_1) \neq F(z_2, t_2))$;

4) $(z \in P \setminus C) \Rightarrow (F(z, 0) \neq F(z, T))$;

5) множество $F(P, T)$ совпадает с множеством P .

Подмножество C называется *осью поворота*.

По индукции, возможность обобщенного поворота множеств с некоторой размерностью обозначает нижнюю границу для основанной на движении размерности t -пространства, а невозможность - верхнюю границу.

Определение 8. Если никакое z -множество в k -пространстве не имеет сплошной ширины, то говорится, что *ориентационная размерность (ор-размерность)* такого пространства равна 1.

Определение 9. (По индукции) Если в t -пространстве существует множество P с ор-размерностью n и его можно повернуть вокруг оси $C \subset P$ с ор-размерностью $(n-1)$, то говорится, что ор-размерность пространства не меньше $(n+1)$.

Если высказывание «ор-размерность t -пространства не меньше $(n+2)$ » неверно, то говорится, что ор-размерность t -пространства равна $(n+1)$.

В евклидовых пространствах и их подпространствах обобщенный поворот совпадает с поворотом в геометрическом смысле.

3. Примеры ориентационной размерности.

Рассмотрим риманову поверхность Z_n функции $w = \sqrt[n]{x}$, $x \in C$, $n \geq 2$ (k -пространство). При $n=2$ она была реализована в [1]. При $n=2$, полагая

$$z_1 = \{25, -5\}; z_0 = \{0, 0\}; z_2 = \{25, 5\} \quad (1)$$

получаем, что при повороте на 180° против часовой стрелки вокруг оси z_0 будет

$$z_1' = \{-25, -5i\}; z_0 = \{0, 0\}; z_2' = \{-25, 5i\} \quad (2)$$

При еще одном повороте на 180^0 против часовой стрелки будет

$$z_1'' = \{25, 5\}; z_0 = \{0, 0\}; z_2'' = \{25, -5\}, \quad (3)$$

что совпадает с (1) при соответствующей замене. Таким образом, ор-размерность Z_2 равна 2. Аналогично, можно доказать, что ор-размерность Z_n равна 2 при $n > 2$.

Для компьютерной реализации частичного обобщенного поворота в двумерном k -пространстве предлагаются следующие операции:

- отметка точки в k -пространстве;
- изображение кратчайшего пути между двумя отмеченными точками;
- изображение следа кратчайших путей между двумя отмеченными точками при движении одной из точек.

Литература:

1. Борубаев А.А., Панков П.С. Компьютерные представления кинематических топологических пространств. - Бишкек: КГНУ, 1999. - 131 с.
2. Борубаев А.А., Панков П.С. Кинематическое изображение топологических пространств, представляемых в виде склейки // Вычислительные технологии (изд. СО РАН). - Новосибирск, 1999. - Т. 4. - №5. - С. 3-9.
3. Борубаев А.А., Pankov P.S., Chekeev A.A. Spaces Uniformed by Coverings. - Hungarian-Kyrgyz Friendship Society. - Budapest, 2003. - 169 p.
4. Борубаев А.А., Панков П.С. Распознаваемость размеченных топологических пространств // Вестник КНУ, 2007. / Серия 3. - Вып. 4. - С. 5-8.
5. Жораев А.Х. Исследование топологических пространств кинематическим методом. - Saarbrücken, Deutschland: Lap Lambert Academic Publishing, 2017. - 78 с.
6. Жораев А.Х. Методика кинематического исследования свойств топологических пространств. // Вестник ОшГУ. - Спецвыпуск 3, 2018. - С. 263-265.
7. Жораев А.Х. Индуктивное определение кинематической размерности топологических пространств. // Вестник Института математики НАН КР, 2018. - №1. - С. 139-144.