

Бараталиев К.Б., Асанкулова А.С.

НЕТЕР ТИБИНДЕГИ ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН КОМПЛЕКСТИК ОБЛАСТТА КАДИМКИ ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ

Бараталиев К.Б., Асанкулова А.С.

НОРМАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПО НЕТЕРУ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

K.B. Barataliev, A.S. Asankulova

NOETHER NORMAL SOLVABILITY OF INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND IN THE COMPLEX DOMAIN

УДК: 517.932

Бул макалада комплекстик өзгөрүлмөдөгү үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдеме изилдөөгө алынат жана ал Гильберттин проблемасынын чектүү шарты катарында каралат. Бул маселе Дирихленин классикалык маселесинин түздөн түз уландысы. Гильберт өзүнүн маселесин ядросу Гильберттиги болгон сингулярдык интегралдык теңдемеге алып келет да, алардын эквиваленттүүлүгүн көрөт. Ошол эле учурда сингулярдык теңдеме үчүн Нетер өзүнүн даназалуу теоремаларын далилдейт. Гильберттин бул теңдемеси Кошинин ядросу менен каралган сингулярдык интегралдык теңдемеге оңой өтө алат жана ал Римандын маселесине эквиваленттүү экендиги далилденет. Акыркылардын экөөндө тең Нетердин теоремалары далилденген болот. Ушулардын негизинде макалада каралып жаткан теңдеме үчүн Нетердин теоремалары далилденет.

Негизги сөздөр: кадимки чыгарылыш, Фредгольмдой, Нетердей, Кошинин ядросу, Гильберттин ядросу, Хаусдорфдой, интегралдык теңдеме, сингулярдык теңдеме, чектин шарты, чектүү маселе.

В этой статье рассматривается линейное интегральное уравнение третьего рода в комплексной области вида (1), которое рассматривается как граничное условие краевой задачи Гильберта, являющейся непосредственным обобщением классической граничной задачи Дирихле. Свою краевую задачу Гильберт сводит к задаче решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта в вещественной области. В 1921 году для этого уравнения Нетер впервые доказал свои знаменитые теоремы. Это сингулярное уравнение с ядром Гильберта легко сводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши и для него Нетер также доказал свои теоремы спустя около десяти лет и оно оказалось эквивалентным краевой задаче Римана в теории аналитических функций. На основании этих утверждений доказаны справедливость теорем Нетера для рассматриваемого интегрального уравнения третьего рода (1).

Ключевые слова: нормальная разрешимость, Фредгольмовость, Нетеровость, ядро Коши, ядро Гильберта, Хаусдорфовость, интегральные уравнения, сингулярные уравнения, граничные условия, краевая задача.

This article discusses we consider a linear integral equation of the third kind in a complex domain of the form (1), which is considered as the boundary condition of the Hilbert boundary value problem, which is a direct generalization of the classical Dirichlet boundary value problem. Hilbert reduces his boundary-value problem to the problem of solving a singular integral equation with a Hilbert kernel in the real domain. In 1921, Neter first proved his famous theorems for this equation. This singular equation with a Hilbert kernel can easily be reduced to a singular integral equation with a Cauchy kernel, and for it Noether also proved his theorems after about ten years and it turned out to be equivalent to the Riemann boundary value problem in the theory of analytic functions. Based on these statements, the validity of Noether's theorems for the considered integral equation of the third kind (1) is proved.

Key words: normal solvability, Fredholm property, Noether property, Cauchy kernel, Hilbert kernel, Hausdorff property, integral equations, singular equations, boundary conditions, boundary value problem.

В настоящей работе рассматривается линейное интегральное уравнение третьего рода в комплексной области вида

$$(z - z_0)^n \cdot \varphi(z) + \int_L k(z, r) \varphi(r) dr = f(z), \quad (z \in L), \quad (1)$$

где $f(z) \in L_p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$) – заданная функция на единичной окружности $\Gamma = \{t: |t| = 1\}$ в комплексной плоскости с центром в начале координат.

Интегральный оператор K , определяемый формулой

$$(K\phi)(z) = \int_L k(z, \zeta) \phi(\zeta) d\zeta, \quad (2)$$

где ядро $k(z, \zeta)$ предполагаем имеющим разве что слабую особенность на Γ , вследствие чего оператор K является вполне непрерывным в пространстве $L_p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$). Поэтому, если бы оператор A , определяемый формулой

$$(A\phi)(z) = (z - z_0)^n \cdot \phi(z) \quad (3)$$

был бы непрерывно обратимым в $L_p(\Gamma)$, то уравнение (1) было бы фредгольмовым. Однако оператор A этим свойством не обладает, но оно, как будет показано ниже, является нетеревым.

Положив

$$(z - z_0)^n = a(x, y) + ib(x, y) \equiv \lambda(z), \quad (4)$$

где $a(x, y)$ и $b(x, y)$ – действительные функции, уравнение (1) будем рассматривать как граничное условие краевой задачи Гильберта в теории аналитических функций.

Краевая задача Гильберта формулируется следующим образом ([2].стр.174):

На единичной окружности $\Gamma = \{t: |t| = 1\}$ в комплексной плоскости с центром в начале координат заданы вещественные функции $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ комплексного переменного t и выполнено условие нормальности

$$a^2(t) + b^2(t) \neq 0 \quad (t \in \Gamma). \quad (6)$$

Требуется определить функцию $\Phi(t) = u(t) + iv(t)$ такую, что она

- 1) регулярна во всех точках круга $\Gamma^+ = \{t: |t| < 1\}$;
- 2) непрерывна в области $\bar{\Gamma}^+ = \{\Gamma^+ \cup \Gamma\}$;
- 3) на границе Γ эта функция является решением уравнения

$$\operatorname{Re}[\lambda(t)\Phi(t)] = c(t) \quad (t \in \Gamma) \quad (7)$$

или что эквивалентно, вещественного уравнения

$$a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t) \quad (t \in \Gamma). \quad (8)$$

Краевая задача Гильберта в теории аналитических функций является непосредственным обобщением классической граничной задачи Дирихле – отыскания гармонической в круге Γ^+ функции $u(x, y) = u(z)$, непрерывной в замкнутом круге $\bar{\Gamma}^+ \cup \Gamma$ и принимающей заданные непрерывные значения $\phi(t)$ на окружности Γ .

Таким образом мы имеем краевую задачу Гильберта об определении аналитической функции в круге Γ^+ по ее значениям на окружности Γ , на которой задаются граничные условия в виде уравнения (1)

Известно, что краевая задача Гильберта для окружности безусловно разрешима при $x \geq 0$, где

$$x = \frac{1}{2\pi} [\arg(a(t) + ib(t))]_{\Gamma},$$

и имеет $2x + 1$ линейно независимых решений, а при $x < 0$ существует единственное решение этой задачи при выполнении $(-2x - 1)$ условий разрешимости.

Напомним (см., напр., [3] стр. 253), что краевая задача Гильберта нетерова, если выполнено условие (5).

Если Γ – произвольный замкнутый гладкий контур, то с помощью конформных отображений, содержащую его область, можно отображать в единичный круг.

Гильберт привел ([2], стр. 174) свою краевую задачу к сингулярному интегральному уравнению с ядром Гильберта

$$\tilde{a}(s)\tilde{\varphi}(s) - \frac{\tilde{b}(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(\tau) \cot \frac{\tau - s}{2} d\tau = g(s), \quad (9)$$

где $\tilde{a}(s)$, $\tilde{b}(s)$, $g(s)$ – заданные, 2π – периодические функции удовлетворяющие условиям Гельдера.

Именно для уравнения (9) Ф.Нетер установил (см. [1], стр. 132) доказал (1921) свои знаменитые теоремы которые останутся справедливыми без изменений и для, так называемого, полного сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта

$$\tilde{a}(t)\tilde{\varphi}(t) - \frac{\tilde{b}(t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(\tau) \cot \frac{\tau - t}{2} d\tau + \int k(s, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau = g(s), \quad (10)$$

где оператор K определяемый формулой

$$(K\tilde{\varphi})(t) = \int_{\Gamma} k(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau,$$

является в полне непрерывным в $L_p(\Gamma)$.

Если для уравнение Гильберта (10) служило приложением его же краевой задачи, то для Нетера краевая задача Гильберта служила приложением его теории.

Уравнение (10) с помощью замены $t = e^{is}$ и $\xi = e^{i\tau}$ сводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши

$$a(t)\varphi(t) - \frac{b(t)}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{\Gamma} k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t). \quad (11)$$

Для уравнения (11) Нетер доказал свои теоремы несколько позже, чем для уравнения (10).

Если краевая задача Гильберта эквивалента к уравнению (7) в том смысле, что они разрешимы или не разрешимы одновременно и однородные задачи имеет одинаковое количество линейно независимых решений, то уравнение (8) эквивалентно к краевой задаче Римана, которая формулируется следующим образом (см., [2], стр.).

Требуется найти функцию $\Phi(z)$ такую, что она

- 1) регулярна во всех точках области Γ^+ и непрерывную в области $\Gamma^+ \cup \Gamma$;
- 2) регулярна в области $\Gamma^- = \{t: |t| > 1\}$ и непрерывную в области $\Gamma^- \cup \Gamma$;
- 3) удовлетворяет краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),$$

где $G(t)$ и $g(t)$ – заданные на Γ функции,

$$G(t) = -\frac{a(t) + ib(t)}{a(t) - ib(t)}, \quad g(t) = \frac{2c(t)}{a(t) - ib(t)}, \quad t \in \Gamma.$$

Таким образом сингулярное интегральное уравнение ядром Гильберта является граничным интегральным уравнением краевой задачи Гильберта, а сингулярное интегральное с ядром Коши (11) является граничным условием краевой задачи Римана и они эквивалентны в том смысле, что для них одновременно справедливы теоремы Нетера.

Выше мы рассматривали краевую задачу Гильберта и решили задачу определения аналитической в области функции по заданным ее на границе значениям действительной части следующего уравнения

$$\begin{aligned} \lambda(t)\Phi(t) &= (a(t) + ib(t))(u(t) + iv(t)) = \\ &= a(t)u(t) - b(t)v(t) + i(a(t)v(t) + b(t)u(t)). \end{aligned} \quad (12)$$

Действительную часть этого уравнения мы рассматривали как граничное условие краевой задачи Гильберта

$$\operatorname{Re}[\lambda(t)\Phi(t)] = f(t), \quad (t \in \Gamma)$$

или что эквивалентно вещественному уравнению

$$a(t)u(t) - b(t)v(t) = f(t), \quad t \in \Gamma.$$

Эта задача, как уже сказано выше нетерова, если выполнено условие (5).

Остается доказать нетеровости мнимой части выражения (12). Для этого введем операторы A, B, S с помощью формул [4]

$$(A\varphi)(t) = a(t)\varphi(t); \quad (B\varphi)(t) = b(t)\varphi(t);$$

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma.$$

Тогда уравнение (1) можно коротко записать в виде

$$K_0\varphi \equiv A\varphi + BS\varphi, \quad (13)$$

где операторы A и BS в отдельности непрерывно обратимы, тогда как оператор $A + BS$ не всегда обратим. С этим как раз и связано несовпадение основных теорем теории сингулярных интегральных уравнений с теоремами Фредгольма.

Производя подстановку $\Psi = S\varphi$, где Ψ – новая искомая функция, на основании формулы обращения $\varphi = S\Psi$ ([3], стр. 138-139) запишем уравнение

$$a(t)u(t) + \frac{b(t)}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t) \quad (14)$$

в виде

$$B\Psi + AS\Psi = f(x).$$

Таким образом операторы A и B можно поменять местами, а это означает, что коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ в уравнении (15) можно поменять местами.

Тогда можем написать

$$g(t) = \operatorname{Im}[\lambda(t)\Phi(t)] = a(t)v(t) + b(t)u(t) = \\ = a(t)u(t) + b(t)v(t) = \operatorname{Re}[\bar{\lambda}(t)\Phi(t)] = f(t) \quad (t \in \Gamma),$$

т.е.

$$\operatorname{Re}[\bar{\lambda}(t)\Phi(t)] = g(t) \quad (t \in \Gamma).$$

При этом имеем выражение для индекса задачи

$$x = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{a(t) + ib(t)}{a(t) - ib(t)} \right]$$

вместо

$$x = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{a(t) - ib(t)}{a(t) + ib(t)} \right].$$

Таким образом рассмотренное нами интегральное уравнение третьего рода в комплексной плоскости нетерова вместе как СИУ с ядром Гильберта, так и СИУ с ядром Коши.

Итак, справедлива

Теорема. Пусть $\Gamma = \{t: |t| = 1\}$ – единичная окружность в комплексной плоскости с центром в начале координат. Рассмотрим линейное интегральное уравнение третьего рода вида (1), где $f(t) \in L_p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$), а функция $k(t, \tau)$ обеспечивает компактность интегрального оператора. Тогда уравнение (1) нормально разрешимо по Нетеру.

Литература:

1. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. - М.: Мир, 1979.
2. Мухелишвили Н.И., Сингулярные интегральные уравнения. - М.: «Наука», 1968. - С. 3.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977.
4. Бараталиев К.Б. К теории интегральных уравнений третьего рода. - Бишкек, 2004. - 160 с.