DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Тампагаров К.Б.

АНАЛИТИКАЛЫК ФУНКЦИЯЛУУ БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СИНГУЛЯРДУУ ДҮҮЛҮККӨН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИНИН АСИМПТОТИКАЛЫК ӨЗГӨРҮШҮН БИР КАЛЫПТА ТҮШҮҮ (КӨТӨРҮЛҮҮ) МЕТОДУ МЕНЕН ИЗИЛДӨӨ

Тампагаров К.Б.

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ РАВНОМЕРНОГО СПУСКА (ПОДЪЕМА)

K.B. Tampagarov

THE STUDY OF THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED FIRST-ORDER EQUATIONS BY THE METHOD OF UNIFORM DESCENT (ASCENT)

УДК: 517. 932

Автордун мурдагы жумуштарында сингулярдуу дүүлүккөн теңдемелердин аргументтеринин өзгөрүү областында чектик катмар сызыктардын пайда болушу далилденген. Бул сызыктарды мындай теңдемелердин өзгөчө касиеттери катары кароого болот. Бул жумушта биринчи тартиптеги аналитикалык функциялуу сингулярдуу дүүлүккөн кадимки дифференциялдык теңдемелердин чечимдеринин асимптотикалык өзгөрүшү бир калыпта түшүү (көтөрүлүү) методун колдонуу менен изилденди. Макалада аналитикалык функциялуу биринчи тартиптеги сингулярдуу дүүлүккөн теңдемелердин чечимдеринин асимптотикалык өзгөрүшүн бир калыпта түшүү (көтөрүлүү) методу менен изилдөө каралган.

Негизги сөздөр: *сингулярдуу дүүлүккөн теңдемелер, чектик катмар сызыктар, аналитикалык функция, деңгээл сызыктардын торчосу.*

В предыдущих работах автора было доказано, что для сингулярно возмущенных уравнений в области изменения аргумента возникают погранслойные линии. эти линии можно рассматривать как специфическое свойство таких уравнений. в данной статье исследовано асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с аналитическими функциями применением метода равномерного спуска (подъема). В статье рассмотрено исследование асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений первого порядка методом равномерного спуска (подъема).

Ключевые слова: *сингулярно возмущенное уравнение, погранслойная линия, аналитическая функция, решетка линии уровня.*

In previous works of the author, it was proved that for singularly perturbed equations in the region of variation of the argument boundary layer lines arise. These lines can be considered as a specific property of such equations. This article investigates the asymptotic behavior of solutions of singularly perturbed ordinary first-order differential equations with analytic functions using the uniform descent (ascent) method. The article deals with the study of the asymptotic behavior of solutions of singularly perturbed first-order equations by the method of uniform descent (ascent).

Key words: *singularly perturbed equation, boundary layer line, analytic function, level line lattice.*

Введение. Для решений начальных задач сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменной устойчивости, начиная с работы [1] и другими авторами получены условия для ограниченности решений в некоторых областях изменения аргумента и стремления решений к нулю в примыкающих областях комплексной плоскости. В [2] было показано, что для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями естественно возникают линии, разделяющие области с разным асимптотическим поведением решения началь-

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

ной задачи, что можно рассмотреть, как специфическое свойство таких уравнений, и предложено называть их погранслойными линиями. В данной работе поставленная задача решена с применением метода равномерного спуска (подъема) [3] и топологических методов.

Постановка задачи: Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)\, z(t,\varepsilon) + \varepsilon g\big(t, z(t,\varepsilon)\big),\ t \in \Omega \subset C \tag{1}$$

с начальным условием

$$(z(t_0,\varepsilon) = z^0, \tag{2}$$

Пусть выполняются условия

U1 $a(t) \in Q(\Omega)$. U2 $\forall\, t \in \Omega\, (a(t) \neq 0)$.

U3 $g(t,z) \in Q(H), H = \{(t,\ z) | t \in \Omega, |z| \leq \delta > 0\}$.

U4 $\forall \tilde{z}\,, \tilde{\tilde{z}} \in \{|z| \leq \delta\}(\left|g(t,\tilde{z}) - g(t,\tilde{\tilde{z}})\right| \leq M\left|\tilde{z} - \tilde{\tilde{z}}\right|, 0 < M - const)$.

Требуется исследовать асимптотическое поведение решения задачи (1) – (2) для $t \in \Omega_0\ (t_0)$ – решетка линии уровня (РЛУ). Для решения поставленной задачи применим метод равномерного спуска (подъема). Область Ω_0 разделяется линией (L_0) на части Ω_1 и Ω_2. При этом $\forall\, t \in \Omega_1\ (Re\, F(t) \leq 0)$ и $\forall\, t \in \Omega_2\ (Re\, F(t) \leq 0)$. В обоих случаях равенство имеет место только на (L_0). Рассмотрим область Ω_1. Часть области, ограниченную линиями (L_0) и $(L_{01}) = \{\, t \in \Omega_0 |\, F_1(t_1,t_2) = \varepsilon \ln \varepsilon\,\}$, обозначим Ω_{10}, при этом будем считать, что линия (L_{01}) не входит в область Ω_{10}. Оставшуюся часть области Ω_1 обозначим Ω_{11}. Согласно построения (L_{01}) входит в Ω_{11}. Область Ω_2 также разделим на части Ω_{20} и Ω_{21}, Ω_{22} разделив линиями

$$(L_{02}) = \{t \in \Omega_0 | F_1(t_1,t_2) = +\varepsilon\}, (L_{03}) = \{t \in \Omega_0 | F_1(t_1,t_2) - \varepsilon\, ln\varepsilon\}.$$

Линия (L_{02}) входит в область Ω_{22}. Асимптотическое поведение решение задачи (1) – (2) в каждой из областей Ω_1, Ω_2 будем рассматривать отдельно. Сначала рассмотрим случай, когда $t \in \Omega_1$. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия U1-U2. Тогда $\forall t \in \Omega_1$ решение задачи (1) – (2) существует, единственно и ограничено.

Доказательство. Решение задачи (1)–(2) удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$z(t,\varepsilon) = z^0 e^{\frac{F(t)}{\varepsilon}} + \int_{p(t_0,t)} e^{\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}} g\big(\tau, z(\tau,\varepsilon)\big) d\tau, \tag{3}$$

где $p(t_0,t)$ – произвольный путь интегрирования, соединяющий точки t_0, t и полностью принадлежащий области Ω_1.

К уравнению (3) применим метод равномерного спуска. Определим кривую $(k(t_0,t))$, соединяющую точки t_0 и $t \in \Omega_1$. Для этого рассмотрим уравнение

$$F_1(\tau_1,\tau_2) = a\tau_1 + b. \tag{4}$$

Пусть $t \in \Omega_1$ – произвольная точка. Известно, что через точку t проходит единственная линия $(L\ \ )$. Согласно определения Ω_1 можно утверждать, что $L \leq 0$. Множество $\{(L)\}$ полностью заполняет область Ω_1.

Подставляя значения $(\tau_1 = t_{10},\ \tau_2 = t_{20})$ и $(\tau_1 = t_1,\ \tau_2 = t_2)$ в уравнение (4), определяем a и b. Имеем

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$\begin{cases} a\,t_{10} + b = 0, \\ a\,t_1 + b = L\,. \end{cases}$ Отсюда $a = \frac{L}{t_1 - t_{10}}, b = -\frac{t_{10}L}{t_1 - t_{10}}$.

Подставляя значения a и b в (4), получим $F_1(\tau_1, \tau_2)' = \frac{L}{t_1 - t_{10}}(\tau_1 - t_{10})$.

В силу условия U2 выполняется $\forall\, t \in \Omega_0 \left(\frac{\partial F_1}{\partial\, t_2} \neq 0\right)$. Тогда из уравнения (4) определяется однозначная, бесконечно дифференцируемая функция

$$\tau_2 = \varphi(\tau_1) \tag{5}$$

с областью определения $t_{10} \leq \tau_1 \leq \alpha_1$ или $\alpha_2 \leq \tau_1 \leq t_{10}$. Функция (5) определяет кривую $(k(t_0, t))$. За путь интегрирования $p(t_0, t)$ возьмем кривую $(k(t_0, t))$. С учетом выбранного пути интегрирования представим уравнение (3) в следующем виде

$$z(t, \varepsilon) = z^0 e^{\frac{F(t)}{\varepsilon}} + \int_{t_{10}}^{t_1} e^{\frac{F(t) - F(\tau)}{\varepsilon}} g\big(\tau, z(\tau, \varepsilon)\big)(1 + i\varphi'(\tau_1))d\tau, \tag{6}$$

где $t = t_1 + i\varphi(t_1)$, $\tau = \tau_1 + i\varphi(\tau_1)$, $F(t) = a(t_1) + b(t_1) + iF_2\big(t_1, \varphi(t_1)\big)$, $F(\tau) = a(t_1)\tau_1 + b(t_1) + iF_2\big(\tau_1, \varphi(\tau_1)\big) \equiv \frac{L}{t_1 - t_{10}}(\tau_1 - t_{10}) + iF_2\big(\tau_1, \varphi(\tau_1)\big)$.

К (6) применим метод последовательных приближений, которые определим так

$$z_m(t, \varepsilon) = z^0 e^{\frac{F(t)}{\varepsilon}} + \int_{t_{10}}^{t_1} e^{\frac{F(t) - F(\tau)}{\varepsilon}} g\big(\tau, z_{m-1}(\tau, \varepsilon)\big)(1 + i\varphi'(\tau_1))d\tau_1, \tag{7}$$

$$z_0(t, \varepsilon) \equiv 0.$$

Проведя оценку для каждого из случаев $t \in \Omega_{10}$ и $t \in \Omega_{11}$ отдельно, методом индукции докажем оценку

$$|z_m(t, \varepsilon)| \leq C_1\varepsilon(1 + M_0C_2\varepsilon + (M_0C_2\varepsilon)^2 + \cdots + (M_0C_2\varepsilon)^{m-1}). \tag{8}$$

Из (8) при условии $M_0C_2\varepsilon < 1$ получим

$$|z_m(t, \varepsilon)| \leq \frac{C_1\varepsilon}{1 - M_0C_2\varepsilon},\ m \in N. \tag{9}$$

Если учесть (9), то для этого решения справедлива оценка

$$|z(t, \varepsilon)| \leq \frac{C_1\varepsilon}{1 - M_0C_2\varepsilon}. \tag{10}$$

Таким образом, $\forall t \in \Omega_1$ решение задачи (1)–(2) существует и ограничено.

Полученные оценки (9), (10) подтверждают ограниченность решения. Единственность решения доказывается методом от противного. Для этого достаточно повторить процедуры, проведенные при доказательстве сходимости последовательных приближений.

Примечание. Процесс доказательства Теоремы 1 показывает, что для исследования асимптотического поведения решения задачи (1) – (2) достаточно рассмотреть множество $\{(L(t))\}$, состоящее из линий уровней $L(t)$, проходящих через заданные точки t. Множество $\{(L(t))\}$ полностью покрывает область Ω_2.

Далее рассмотрим случай $t \in \Omega_2$. Область Ω_2 состоит из частей Ω_{21}, Ω_{22}, Ω_{23}. Рассмотрим случаи $t \in \Omega_{21}$ и $t \in \Omega_{23}$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия U1–U4.

Тогда: 1. $\forall\, t \in \Omega_{21}$ решение $z(t, \varepsilon)$ задачи (1)–(2) существует, единственно и справедлива оценка $|z(t, \varepsilon)| \leq e^{M_1(t_1 - t_{10})}(|z^0|e + 1) - 1$.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 12, 2019

2. Если решение $z(t,\varepsilon)$ задачи (1)–(2) с $z^0\neq 0$ существует $\forall\, t \in \Omega_{23}$, то оно не ограничено.

Доказательство. 1. Пусть $t \in \Omega_{21}$. Как и в предыдущих случаях, решение задачи представим в виде

$$z(t,\varepsilon) = z^0 e^{\frac{F(t)}{\varepsilon}} + \int_{p(t_0,t)} e^{\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}} g\big(\tau, z(\tau,\varepsilon)\big) dr, \qquad (11)$$

где $t \in \big(L(t)\big) \subset \Omega_{23}$.

Аналогично, как и в предыдущих случаях, применяя методы равномерного спуска и последовательных приближений получим оценку

$$|z_m(t,\ \varepsilon)| \le e^{M_1(t_1-t_{10})}(|z^0|e+1)-1,\ m=1,2,\dots\ . \qquad (12)$$

Учитывая оценку (12), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty}|z_m - z_{m-1}| \le \sum_{m=1}^{\infty}\left[|z^0|e\,\frac{(M_1(t_1-t_{10}))^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{(M_1(t_1-t_{10}))^{m}}{m!}\right] =$$

$$= |z^0|e^{(M_1(t_1-t_{10}))+1} + e^{M_1(t_1-t_{10})} - 1 = (e|z^0|+1)e^{M_1(t_1-t_{10})} - 1.$$

Отсюда следует равномерная сходимость последовательности $\{z_m\}$ $\forall\, t \in \Omega_{21}$. Предельную функцию $\{z_m\}$ обозначим $z(t,\varepsilon)$, она будет решением уравнения (11). Если учесть оценку (12), то для функции $z(t,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$|z(t,\varepsilon)| \le (|z^0|e+1)e^{M_1(t_1-t_{10})} - 1. \qquad (13)$$

Единственность решения доказывается методом от противного. Из (13) следует справедливость первой части теоремы. Докажем вторую часть теоремы.

Пусть $\forall\, t \in \Omega_{23}\ (|z(t,\varepsilon)| \le \delta)$. (14)

Тогда из (11) имеем

$$|z(t,\varepsilon)| \ge e^{\frac{a(t_1-t_{10})}{\varepsilon}}\left(|z^0| - \int_{t_{10}}^{t_1}|g_{10}|\,e^{-\frac{a(\tau_1-t_{10})}{\varepsilon}}d\tau_1 - -\int_{t_{10}}^{t_1}\bar{e}^{\frac{a(\tau_1-t_{10})}{\varepsilon}}|g_{11}(\tau,z)|d\tau_1\right). \qquad (15)$$

В рассматриваемом случае $a = \frac{L(t)}{t_1-t_{10}}$ и $\forall\, t \in \Omega_{23}\ (L(t) \ge -\varepsilon Ln\varepsilon)$.

Из (15), с учетом (14), получим

$$|z(t,\varepsilon)| \ge e^{\frac{L(t)}{\varepsilon}}\left(|z^0| - 2\left(M_0\left(-\frac{\varepsilon}{a}\right)\left(e^{-\frac{a(t_1-t_{10})}{\varepsilon}}-1\right)\right)\right) \ge e^{\frac{L(t)}{\varepsilon}}(|z^0| - C_0\varepsilon). \qquad (16)$$

Отсюда получаем $|z(t,\varepsilon)| \to +\infty$ по ε. Полученное противоречие показывает, если решение уравнения (11) существует в Ω_{23}, то оно не ограничено. Теорема доказана.

Литература:

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КНУ. - Серия 3, Выпуск 6. - Бишкек, 2001. - С. 190-200.
2. Панков П.С., Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б., Нарбаев М.Р. Явление погранслойных линий и асимтотика решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями // Вестник ОшГУ, 2013. - №1 (специальный выпуск). - С. 227-231.
3. Тампагаров К.Б., Алыбаев К.С. Метод равномерного спуска (подъема) // Вестник ЖАГУ, спец. Выпуск. - С. 44-48.