DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 12, 2019

Панков П.С., Жээнтаева Ж.К.

ЭВОЛЮЦИЯЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ЖАРЫМ ОКТО АСИМПТОТИКАЛЫК ЭКВИВАЛЕНТТИГИ

Панков П.С., Жээнтаева Ж.К.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОЛУОСИ

P.S. Pankov, Zh.K. Zheentaeva

ASYMPTOTICAL EQUIVALENCE OF SOLUTIONS OF EVOLUTIONAL EQUATIONS ON THE HALF-AXIS

УДК: 517.929

Мурда кечигүүчү аргументтүү дифференциалдык теңдемелердин теориясында «атайын» чыгарылыштарынын кубулушу да табылды. Аргументинин кечигүүсү аз болгон дифференциалдык теңдеменин бардык чыгарылыштары мейкиндигинин ченеми чексиз, ал эми атайын чыгарылыштарын мейкиндигинин ченеми бирге барабар. Аргументинин кечигүүсү аз болгон дифференциалдык теңдеменин ар бир чыгарылышына асимптотикалык жакын атайын чыгарылышы бар. Мындай кечигүүнүн баалоо далилделди. Макалада эволюциялык теңдемелердин баштапкы чыгарылыштары үчүн асимптотикалык эквиваленттик катышы аныкталат: убакыттын көбөйүшү менен алардын чексиз жакындашуусу. Фактор-мейкиндиктин ченеми баштапкы мейкиндиктин ченеминен кичүү болгон кубулуш, «чыгарылыштар мейкиндигинин ченемин асимптотикалык төмөндөтүү» деп айтылган. Ар түрдүү белгилүү жыйынтыктардын бирдей көрүнүштө берилгендиги көрсөтүлүп, алардын ичине кечигүүчү аргументтүү дифференциалдык теңдемелердин жана айырмалык теңдемелердин системасынын атайын чыгарылыштары кирет.

Негизги сөздөр: *асимптотикалык эквиваленттик, айырмалык теңдеме, дифференциалдык теңдеме, теңдемелер системасы, баштапкы маселе, асимптотика, атайын чыгарылыш.*

Ранее было обнаружено явление «специальных» решений дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента. Пространство всех решений дифференциального уравнения с малым запаздыванием аргумента бесконечно мерно, тогда как размерность пространства специальных решений равна единице. Для каждого решения дифференциального уравнения с малым запаздыванием аргумента существует асимптотически близкое специальное решение. Была доказана оценка для такого запаздывания. В статье определено отношение асимптотической эквивалентности для решений начальных задач эволюционных уравнений: их неограниченное сближение с увеличением времени. Явление, когда размерность фактор-пространства меньше размерности исходного пространства, названо «асимптотическим уменьшением размерности пространства решений». Показано, что так единообразно представляются различные известные результаты, в том числе - наличие специальных решений дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента и систем разностных уравнений.

Ключевые слова: *асимптотическая эквивалентность, разностное уравнение, дифференциальное уравнение, начальная задача, асимптотика, специальное решение.*

Supra the phenomenon of "special" solutions of differential equations with delay of argument was discovered. The space of all solutions of differential equations with small delay of argument is infinite-dimensional since the dimension of the space of special solutions equals one. For each solution of differential equation with small delay of argument there exists an asymptotically close special solution. An estimation for such delay was proven. The following asymptotical equivalence relation is introduced for solutions of evolutional equations: their infinite convergence while time tends to infinity. The phenomenon "the dimension of the factor-space is less than one of the initial space" is called "asymptotical reducing of dimension of space of solutions". It is demonstrated that various well-known results including existence of special solutions of differential equations with delay of argument and difference equations are presented uniformly in such a way.

Key words: *asymptotic equivalence, difference equation, differential equation, initial value problem, asymptotics of the special solution.*

Введение. А.Пуанкаре [1] и А.М. Ляпунов [2] создали теорию устойчивости (условия, когда решения эволюционного уравнения сближаются между со-бой). А.М. Ляпунов также дал определение условной устойчивости.

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 12, 2019

А.Д. Мышкис [3] обнаружил явление расщепления пространства решений линейных дифференциальных уравнений с малым запаздыванием на «медленно меняющиеся» и «быстро затухающие».

Здесь мы предлагаем некоторые общие определения, которые, по нашему мнению, дают возможность объединить некоторые ранее введенные определения и единообразно изложить полученные результаты.

1. Обозначения и обзор. Мы будем представлять решение некоторого эволюционного уравнения с начальным условием φ в виде оператора $W(t,\varphi): \Lambda\times\Phi\to Z$, где Λ - линейно упорядоченное множество с наименьшим, но без наибольшего элемента (обычно берется $\Lambda=\boldsymbol{R}_+ \equiv [0,\infty)$ - полуось или $\Lambda=\boldsymbol{N}\equiv \{1,2,3,\ldots\}$), Φ - топологическое пространство начальных условий, Z - топологическое пространство значений решений.

<u>Определение 1</u> [2] (в наших обозначениях) ($\Phi = Z = \boldsymbol{R}^n$). Если существует такой k-мерный «диск» $D_k\subset\Phi$, $k\le n$, $\varphi_0 \in D_k$, что

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\varphi\in D_k)((||\varphi-\varphi_0||<\delta)\Rightarrow(\forall t\in\Lambda)(||W(t,\varphi)-W(t,\varphi_0)||<\varepsilon))$, то решение $W(t,\varphi_0)$ называется условно устойчивым с индексом k; если также $\lim\{||W(t,\varphi)-W(t,\varphi_0)||: t\to\infty\}= 0$, то решение называется асимптотически условно устойчивым.

В дальнейшем Ю.А.Рябов и другие авторы, продолжая [3] (см. обзор в [4]) получили результаты, которые дают достаточные условия для следующего.

Пусть $h>0, \Phi=C([-h,0]\to\boldsymbol{R}^n)$ - бесконечномерное пространство, $Z = \boldsymbol{R}^n$, $D\subset\Phi$ - конечномерное пространство.

<u>Определение 2</u>. Если

$$(\forall\varphi\in\Phi)(\exists\varphi_1\in D)(\lim\{||W(t,\varphi)-W(t,\varphi_1)||: t\to\infty\}= 0),$$

то элементы $W(t,\varphi_1), \varphi_1\in D$ называются специальными, имеющими асимптотическое свойство.

Нами также [5] показано, что дифференциальные уравнения с запаздыванием можно преобразовать в эквивалентную систему операторно-разностных уравнений с дискретным временем, с соответствующими свойствами.

2. Определение асимптотической эквивалентности. Мы предлагаем рассмотрение фактор-пространства решений по отношению эквивалентности - сближению решений при увеличении времени.

<u>Определение 3</u>. Фактор-пространство Φ^* пространства начальных условий Φ по отношению «асимптотической эквивалентности»:
для Z - банахова пространства

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow (\lim\{||W(t,\varphi_1)-W(t,\varphi_2)||: t\to\infty\}= 0),$$

для Z - метрического пространства

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow (\lim\{\rho_Z(W(t,\varphi_1)-W(t,\varphi_2)): t\to\infty\}= 0),$$

называется асимптотическим фактор-пространством.

<u>Определение 4</u>. Если размерность пространства Φ^* меньше размерности пространства Φ, то будем говорить, что имеет место явление асимптотического уменьшения размерности пространства решений.

3. Примеры явления асимптотического уменьшения размерности пространства решений. Для многих видов линейных автономных эволюционных уравнений существует такой набор (конечный или счетный, тогда

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$lim\{Re\ \lambda_k : k\to\infty\} = -\infty$)
характеристических чисел λ_1, λ_2, λ_3, … в комплексной плоскости, таких, что $\exp(\lambda_k t)$ является решением уравнения, и соответственно общее решение представимо в виде суммы или асимптотического ряда

$$W(t,\varphi)\sim\sum_k C_k(\varphi)\exp(\lambda_k t), t\in\boldsymbol{R}_+,$$

где C_k - линейные функционалы от начального условия.

При существовании таких λ_k, что $Re\lambda_k < 0$, возникает явление асимптотического уменьшения размерности пространства решений и пространство Φ^* представляется в виде

$$\sum\{\gamma_k\exp(\lambda_k t): Re\ \lambda_k \geq 0\}.$$

Пусть задана гладкая функция $F: \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$. Рассматривается векторно-матричное уравнение

$$x'(t)=-grad(F(x(t))),\ t\in\boldsymbol{R}_+,\ x(0)=\varphi\in\Phi=\boldsymbol{R}^n.$$

Здесь пространство Φ^* совпадает с множеством решений уравнения $grad(F(x))=0$. Можно также отождествить устойчивые и условно устойчивые решения этого уравнения с их областями притяжения в $\boldsymbol{R}^n$.

Основной пример для [3]-[4]. Рассмотрим дифференциальное уравнение с одним постоянным запаздыванием

$$z'(t)=P(t)z(t-h),\ h\geq 0, \qquad (1)$$

с начальным условием

$$x(t)=\varphi(t),\ t\in[-h,0], \qquad (2)$$

где $\varphi(t)\in C[-h,0]$ и $P(t)\in C[\boldsymbol{R}_+]$– заданные функции, $P(t)$ - не постоянная функция, $|P(t)|\leq p_0=const.$

При (*) $||P(t)||\cdot h<e^{-1}=0.367…$, возникают специальные решения, см. выше Определение 2. Если $P(t)\geq 0$, то пространство $\Phi^*=\boldsymbol{R}$.

В связи с этими результатами мы выдвинули и обосновали [5] гипотезу о том, что аналогичные результаты должны иметь место для более фундаментальных – операторно-разностных уравнений, и что результаты, полученные для разностных уравнений, могут улучшить известные результаты для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Мы установили взаимно-однозначное соответствие между уравнениями вида (1) и системами операторно-разностных уравнений, причем условию вида (*) соответствует условие доминирования одного из диагональных коэффициентов над всеми другими.

Уравнение (1) сначала преобразуется в интегральное уравнение сдвига на величину шага в пространстве $C[-h,0]$, а потом это пространство расщепляется на одномерное пространство констант и пространство функций, обращающихся в нуль при $t=0$.

Пусть Ω - некоторое нормированное пространство. Мы предложили рассмотреть четыре последовательности операторов (первая – числа, вторая – «функционалы»):

$$a_n: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R};\ b_n:\Omega\to\boldsymbol{R};\ c_n: \boldsymbol{R}\to\Omega;\ d_n:\Omega\to\Omega,\ n=0,1,2,… \qquad (3)$$

с интервальными ограничениями

$$a_n\in A=[a_-,a_+];\ ||b_n||\leq b>0,\ ||c_n||\leq c>0,\ ||d_n||\leq d>0,$$

и систему разностных уравнений

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$x_{n+1}= a_n x_n + b_n y_n,\ y_{n+1}= c_n x_n+ d_n y_n, n=0,1,2,\ldots$ (4)

<u>Теорема 1</u>. Если $(\forall w>0)((\ q_- := [a + b[-w,w]]\ _- >0)\wedge(|c+[-w,w]d|\leq wq_-)$, то существуют «специальные» (положительные по первой компоненте) решения.

<u>Теорема 2</u>. Если $(d<a_-)\wedge(\ (a_- - d)^2>4bc)$, то выполняются условия Теоремы 1 и можно взять $w=(a_- - d-((a_- - d)^2-4bc)^{1/2})/(2b)$.

<u>Теорема 3</u>. Если $\omega := sup\{|a_n d_n - b_n c_n| : n=1,2,3\ldots\}q_-^{-2} < 1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и «специального» решения $\{X, Y\}$, определенного в Теореме 1, существует предел $\gamma\{x,y\}:=lim_{n\to\infty} x_n/X_n$.

<u>Теорема 4</u>. Если выполняются условия Теорем 2 и 3 и $\omega(a_+ +bw)<1$, то «специальные» решения имеют асимптотическое свойство.

Если $a_n>0$, то пространство $\Phi^*=\boldsymbol{R}$.

Переход от (1) к (4) осуществляется с помощью замены

$$\Xi_m(t) = W\big(t + mh, \varphi(\cdot)\big), -h \leq t \leq 0,\ S_m\Xi(\cdot)(t) = \Xi(0) + \int_{-h}^{t} P(s + mh + h)\, \Xi(s)ds -$$

интегральные операторы сдвига по траекториям уравнения (1) на шаг h. В качестве пространства Ω выбирается $\{y(t)\in C^{(1)}[-h,0]: y(0)=0\}$, с нормой $||y||_\Omega := sup\{\ |y(t)/t|: -h\leq t<0\}$, тогда $|y(t)| \leq ||y||_\Omega |\ t\ |$.

Используется подстановка $x(t) = x(0) + y(t)t$, где $y(t)$ - непрерыв-ная функция.

Таким образом, что введенное понятие асимптотического уменьшения размерности пространства решений дает возможность единообразно представить известные результаты для решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и расширить их для систем разностных уравнений.

Литература:

1. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par une equation différentielle // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1881, 3e série, tome 7. - P. 375-422.
2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - Харьков, 1892. - 250 с.
3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. - Москва: Наука, 1972. - 352 с.
4. Панков П.С. Асимптотическая конечномерность пространства решений одного класса систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. - Минск, 1977. - Т. 13. - №4. - С. 455-462.
5. Жээнтаева Ж.К. Исследование асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием с помощью расщепления пространства // Инновации в науке / Сборник статей по материалам LVII междунар. научно-практ. конф. №5 (54). - Часть I. - Новосибирск: Изд. АНС СибАК, 2016. - С. 149-154.
6. Жээнтаева Ж.К. Алгоритмы для экспериментального исследования асимптотики решений линейных уравнений с запаздывающим аргументом и их использование. // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественно-научного образования. - Москва: РУДН, 2015. - С. 219-223.
7. Жээнтаева Ж.К. Расширение классов дифференциальных уравнений со специальными решениями с периодическими коэффициентами // Вестник Института математики НАН КР, 2018. - №1. - С. 145-151.
8. Zheentaeva Zh. Trial objects to expand class of evolutional equations with special solutions // Тезисы докладов Международной научной конференции «III Борубаевские чтения», посвященной 35-летию со дня образования Института математики НАН КР. - Бишкек: Институт математики, 2019. - С. 35.