DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 12, 2019

*Назаркулова Б., Кененбаева Г.М., Өмүрзакова Г.К.*

# ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУСУ ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕ БОЛГОН ТЕҢДЕМЕНИН АСИМПТОТИКАЛЫК ЧЫГАРЫЛЫШЫ

*Назаркулова Б., Кененбаева Г.М., Омурзакова Г.К.*

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*B. Nazarkulova, G.M. Kenenbaeva, G.K. Omurzakova*

# ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE QUOTIENT EQUATION DERIVATIVES OF THE SECOND ORDER

*УДК: 517.932*

*Бул макалада баштапкы жана четки шарттары менен берилген экинчи тартиптеги айрым туундулуу сызыктуу теңдеменин асимптотикалык чыгарылышы тургузулат. Кичине параметрдин даражасы боюнча катардын мүчөлөрүнүн тиешелүү дифференциалдык теңдемелери алынды. Келтирилген маселенин чыгарылышы бир тектүү эмес биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемеден жана четки катмар тибиндеги функция бир тектүү экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемеден табылды. Каралган маселеде берилген функцияларга коюлган божомолдуу шарттарды эске алып, баштапкы жана четки шарттар менен бирге табылган дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштары бааланышты. Калдык мүчөнүн* $\varepsilon \to 0$ *да квадраттык интегралынын бааланышы жөнүндө теорема далилденди. Интегралдын чектелгендигин далилдеш үчүн өзгөртүлүп жазылган калдык мүчөнүн теңдемесин пайдаланып жана t, x тер боюнча чектелген областа интегралдайбыз. Алынган туюнтманын сол жагын бөлүктөп интегралдоо ыкмасы менен интегралдайбыз, ал эми оң жагына элементардык барабарсыздыктарды колдонобуз. Жыйынтыгында,* $\varepsilon \to 0$ *учурунда теорема далилденет.*

***Негизги сөздөр:*** *асимптотикалык чыгарылыш, сызыктуу теңдеме, катардын мүчөлөрү, четки катмар, баалоо, калдык мүчө, интегралдардын чектелгендиги.*

*В данной статье строится асимптотическое решение линейного уравнения в частных производных второго порядка с начальными и краевыми условиями. Получены соответствующие дифференциальные уравнения членов ряда по степеням малого параметра. Найдены решения вырожденной задачи из неоднородного дифференциального уравнения первого порядка и функции типа пограничного слоя из однородного дифференциального уравнения второго порядка. Учитывая предположения для данных функций, входящих в рассматриваемой задачи, решения найденных дифференциальных уравнений с начальными и краевыми условиями оценены. Доказана теорема об квадратичной интегральной оценке остаточного члена при* $\varepsilon \to 0$. *Для доказательства ограниченность интегралов воспользуемся преобразованным уравнением остаточного члена и проинтегрируем по t и по x в ограниченной области. Левую часть полученного выражения проинтегрируем по частям, а к правой части - используем элементарные неравенства. Следовательно, при* $\varepsilon \to 0$ *теорема доказана.*

***Ключевые слова:*** *асимптотическое решение, линейное уравнение,члены ряда, пограничный слой, оценка, остаточный член, ограниченность интегралов.*

*In this paper, we construct an asymptotic solution of a linear partial differential equation of the second order with initial and boundary conditions. The corresponding differential equations of the terms of the series in powers of a small parameter are obtained. The solutions of the degenerate problem from the inhomogeneous first-order differential equation and the functions of the type of the boundary layer from the homogeneous second-order differential equation are found. A quadratic integral estimate for the remainder term is proved for* $\varepsilon \to 0$. *To prove the boundedness of the integrals, we use the transformed equation of the remainder term and integrate over t and over x in a bounded domain. We integrate the left side of the obtained expression in parts, and use the elementary inequalities to the right side. Therefore, the theorem is proved for* $\varepsilon \to 0$.

***Key words:*** *asymptotic solution, linear equation, terms of a series, boundary layer, estimate, remainder term, boundedness of integrals.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



Рассмотрим линейное уравнение в частных производных с малым параметром при старших производных вида

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}\right)+a(t,x)\frac{\partial y(t,x)}{\partial t}+b(t,x)y(t,x)=f(t,x) \qquad (1)$$

с начальными и краевыми условиями

$$y(0,x,\varepsilon)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial y(0,x,\varepsilon)}{\partial t}=\psi(x), \qquad (2)$$

$$y(t,0,\varepsilon)=0, \qquad y(t,l,\varepsilon)=0 \qquad (3)$$

в области$Q=\{0\le t\le T, 0\le x\le l\}$,

где $\varepsilon$ – малый положительный параметр.

Предположим, что функции, входящие в (1) и (2), удовлетворяют следующим условиям (А): $a(t,x)\ge\lambda>0$, $b(t,x)$, $f(t,x)$, $\varphi(x)$и $\psi(x)$ – непрерывны и достаточное количество раз непрерывно дифференцируемы по совокупности своих аргументов в области $Q$, $f(t,0)=f(t,l)=0$.

Формально пологая$\varepsilon=0$, из уравнения (1) получаем уравнение первого порядка

$$a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+b(t,x)u(t,x)=f(t,x), \qquad (4)$$

которое называется вырожденным уравнением для уравнения (1). Начальное и краевые условия для вырожденного уравнения задаются в виде

$$u(0,x)=\varphi(x), \qquad (5)$$

$$u(t,0)=u(t,l)=0. \qquad (6)$$

Второе начальное условие (2) для вырожденного уравнения (4) не выполняется. Возникает необходимость построения функции типа пограничного слоя в решении рассматриваемой задачи. Найдем асимптотику по малому параметру $\varepsilon>0$ решения задачи (1) – (3).

Как и в работе[4] решение задачи (1) – (3) будем искать в виде

$$y(t,x,\varepsilon)=u(t,x)+\varepsilon\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon},x\right)+\varepsilon\xi(t,x,\varepsilon), \qquad (7)$$

где $u(t,x)$ – решение вырожденного уравнения (4), $\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon},x\right)$, $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$ – функция типа пограничного слоя по первому аргументу, $\xi(t,x,\varepsilon)$ – остаточный член.

Подставляя (7) в (1) – (3), а затем преобразуя функции $a(t,x)$, $b(t,x)$, стоящие при$\frac{\partial\Pi(\tau,x)}{\partial\tau}$и $\Pi(\tau,x)$ по формуле Тейлора, имеем

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\Pi(\tau,x)}{\partial\tau^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2\xi(t,x,\varepsilon)}{\partial t^2}-\varepsilon\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}-\varepsilon^2\frac{\partial^2\Pi(\tau,x)}{\partial x^2}-$$
$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\xi(t,x,\varepsilon)}{\partial x^2}+a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+a(0,x)\frac{\partial\Pi(\tau,x)}{\partial\tau}+$$
$$+\varepsilon\frac{\partial a(\theta\varepsilon\tau,x)}{\partial t}\tau\frac{\partial\Pi(\tau,x)}{\partial\tau}+\varepsilon a(t,x)\frac{\partial\xi(t,x,\varepsilon)}{\partial t}+b(t,x)u(t,x)+$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



$$+\varepsilon b(0,x)\Pi(\tau,x)+\varepsilon^2\frac{\partial b(\theta\varepsilon\tau,x)}{\partial t}\tau\Pi(\tau,x)+$$
$$+\varepsilon b(t,x)\xi(t,x,\varepsilon)=f(t,x), \tag{8}$$

где $0<\theta<1$.

Из уравнения (8), группировав функции по степеням $\varepsilon$, получим три уравнения. При $\varepsilon^0$ для функций, зависящих от переменных $t$ и $x$, получим вырожденное уравнение (4), а для функции типа пограничного слоя

$$\frac{\partial^2\Pi(\tau,x)}{\partial\tau^2}+a(0,x)\frac{\partial\Pi(\tau,x)}{\partial\tau}=0. \tag{9}$$

Из оставшихся членов (8) для $\xi(t,x,\varepsilon)$ получаем уравнение

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2\xi(t,x,\varepsilon)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\xi(t,x,\varepsilon)}{\partial x^2}\right)+a(t,x)\frac{\partial\xi(t,x,\varepsilon)}{\partial t}+b(t,x)\xi(t,x,\varepsilon)=$$
$$=-\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon},x\right)}{\partial x^2}-\frac{\partial a(\theta t,x)}{\partial t}\frac{t}{\varepsilon}\dot{\Pi}\left(\frac{t}{\varepsilon},x\right)-$$
$$-b(0,x)\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon},x\right)-\varepsilon\frac{\partial b(\theta t,x)}{\partial t}\frac{t}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon},x\right), \tag{10}$$

где $\dot{\Pi}\left(\frac{t}{\varepsilon},x\right)=\frac{\partial\Pi(\tau,x)}{\partial\tau}$.

Теперь найдем соответствующие начальные и краевые условия для уравнений функции типа пограничного слоя (9) и остаточного члена (10). Для этого подставляя (7) в условия (2), (3), а затем учитывая, что функция $u(t,x)$ определяется из неоднородного уравнения (4) с начальным и краевыми условиями (5), (6), имеем

$$\frac{\partial\Pi(\tau,x)}{\partial\tau}=\psi(x)-\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}, \tag{11}$$
$$\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon},0\right)=0,\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon},l\right)=0, \tag{12}$$
$$\xi(0,x,\varepsilon)=-\Pi(0,x),\qquad \frac{\partial\xi(0,x,\varepsilon)}{\partial t}=0, \tag{13}$$
$$\xi(t,0,\varepsilon)=0,\qquad \xi(t,l,\varepsilon)=0. \tag{14}$$

Из условий (А) следует, что вырожденная задача (4) – (6) имеет непрерывно дифференцируемое решение в виде

$$u(t,x)=\left[\varphi(x)+\int_0^t\frac{f(s,x)}{a(s,x)}\cdot e^{\int_0^s\frac{b(\mu,x)}{a(\mu,x)}d\mu}ds\right]\cdot e^{-\int_0^t\frac{b(s,x)}{a(s,x)}ds}. \tag{15}$$

Решение функции типа пограничного слоя определим из однородного дифференциального уравнения (9) с начальным и краевыми условиями (11) – (12).

Окончательно получим

$$\Pi(\tau,x)=\frac{1}{a(0,x)}\left[\psi(x)-\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}\right]\cdot e^{-a(0,x)\tau}. \tag{16}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



Из (16) и предположения условия (A), следует

$$|\Pi(\tau,x)| \le \left| -\frac{1}{a(0,x)}\left[\psi(x) - \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}\right]\right| \cdot e^{-a(0,x)\tau} \le K_1 e^{-\lambda\tau} \le K_2. \qquad (17)$$

Здесь и ниже $K_1, K_2, \ldots$ обозначают некоторые постоянные, не зависящие от$t, x, \varepsilon$. Кроме того, из (16) производные $\frac{\partial \prod(\tau,x)}{\partial \tau}, \frac{\partial^2 \prod(\tau,x)}{\partial x^2}$ также имеют оценку вида (17).

Теперь ограничимся оценкой функции $\xi(t,x,\varepsilon)$, предположив, что решение уравнения остаточного члена (10) с начальными и краевыми условиями (13), (14) существует. Для удобства выбирается квадратичная интегральная оценка при $\varepsilon \to 0$.

Перепишем уравнение (10) с условиями (13), (14) в виде

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 \xi(t,x,\varepsilon)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi(t,x,\varepsilon)}{\partial x^2}\right) + a(t,x)\frac{\partial \xi(t,x,\varepsilon)}{\partial t} + b(t,x)\xi(t,x,\varepsilon)H(t,x,\varepsilon), \qquad (18)$$

где

$$H(t,x,\varepsilon) = -\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 \Pi\left(\frac{t}{\varepsilon},x\right)}{\partial x^2} -$$

$$-\frac{\partial a(\theta t,x)}{\partial t}\frac{t}{\varepsilon}\dot{\Pi}\left(\frac{t}{\varepsilon},x\right) - b(0,x)\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon},x\right) - \varepsilon\frac{\partial b(\theta t,x)}{\partial t}\frac{t}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon},x\right). \qquad (19)$$

**Теорема.**

Пусть 1) выполнены условия (A);

2) существует положительное постоянное число $\gamma$ такое, что в области $Q$выполняются неравенства

$$\varepsilon\gamma + 2a(t,x) - \lambda > 0,$$

$$\gamma b - b'_t > 0. \qquad (20)$$

Тогда решение задачи (1) – (3) представимо в виде (7), где $\xi(t,x,\varepsilon)$ – непрерывно дифференцируемая функция, для которой интегралы

$$\int_0^l\int_0^T \xi^2(t,x,\varepsilon)dtdx, \qquad \int_0^l\int_0^T \left(\frac{\partial \xi(t,x,\varepsilon)}{\partial t}\right)^2 dtdx \qquad (21)$$

равномерно ограничены при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Для доказательства оценки (21) воспользуемся уравнением (18). С этой целью умножим обе части уравнения (18) на $2\frac{\partial \xi(t,x,\varepsilon)}{\partial t} \cdot e^{-\gamma t}$где$0 < \gamma < \lambda$и проинтегрируем по $t$ и по$x$в области Q.

Имеем

$$2\varepsilon\int_0^l\int_0^T \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}e^{-\gamma t}dtdx - 2\varepsilon\int_0^l\int_0^T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}e^{-\gamma t}dtdx +$$

$$+2\int_0^l\int_0^T a(t,x)\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 e^{-\gamma t}dtdx + 2\int_0^l\int_0^T b(t,x)\ \xi\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}e^{-\gamma t}dtdx =$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557



$$= 2\int_0^l\int_0^T H(t,x,\varepsilon)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}e^{-\gamma t}dtdx. \qquad (22)$$

В полученном выражении (22) левой части проинтегрируем по частям и учитывая, что функция $\xi(t,x,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (13), (14), после некоторых преобразований, получим

$$\varepsilon e^{-\gamma T}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial\xi(T,x,\varepsilon)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi(T,x,\varepsilon)}{\partial x}\right)^2\right]dx+$$
$$+\int_0^l\int_0^T[\varepsilon\gamma+2a(t,x)-\lambda]\left(\frac{\partial\xi(t,x,\varepsilon)}{\partial t}\right)^2e^{-\gamma t}dtdx+$$
$$+\varepsilon\gamma\int_0^l\int_0^T\left(\frac{\partial\xi(T,x,\varepsilon)}{\partial x}\right)^2e^{-\gamma t}dtdx+e^{-\gamma T}\int_0^l b(T,x)\,\xi^2(T,x,\varepsilon)dx+$$
$$+\int_0^l\int_0^T(\gamma b-b_t')\,\xi^2(t,x,\varepsilon)e^{-\gamma t}dtdx\le\varepsilon\int_0^l\left(\frac{\partial\Pi(0,x)}{\partial x}\right)^2dx+$$
$$+\int_0^l b(0,x)\Pi^2(0,x)\,dx+\frac{1}{\lambda}\int_0^l\int_0^T H^2\,(t,x,\varepsilon)e^{-\gamma t}dtdx. \qquad (23)$$

Учитывая предположения условия (А) и оценку (17), имеем при $\varepsilon\to 0$

$$\int_0^l\int_0^T H^2(t,x,\varepsilon)e^{-\gamma t}dtdx\le K_3.$$

Таким образом, отбрасывая в левой части неравенства (23) неотрицательные слагаемые, получим равномерную ограниченность при $\varepsilon\to 0$ интегралов (21). Кроме того, справедливы неравенства (20).

Следовательно, при $\varepsilon\to 0$ имеем

$$\int_0^l\int_0^T\xi^2(t,x,\varepsilon)dtdx\le K_4,\qquad \int_0^l\int_0^T\left(\frac{\partial\xi(t,x,\varepsilon)}{\partial t}\right)^2dtdx\le K_5.$$

Теорема доказана.

**Литература:**


1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. / Успехи математических наук. - М., 1957. - Т.12. - Вып. 5(77).
2. Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. - Фрунзе: Илим, 1972.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высшая школа, 1970.
4. Назаркулова Б. Асимптотическое решение нелинейного уравнения в частных производных первого порядка. // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. Естественно-технические науки. - Бишкек, 2010, серия 3. - Вып. 4. - С. 37-41.