DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 12, 2019

Мураталиева В.Т.

АНАЛИТИКАЛЫК ФУНКЦИЯЛУУ СЫЗЫКТУУ ВОЛЬТЕРРАЛЫК ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ДАРАЖАЛУУ КАТАРЛАР АЛГОРИТМИ

Мураталиева В.Т.

АЛГОРИТМ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛЬТЕРРОВСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

V.T. Muratalieva

ALGORITHM OF POWER SERIES FOR LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS WITH ANALYTICAL FUNCTIONS

УДК: 517.968.7

Макалада ошондой эле математикада теоремаларды далилдөө үчүн компьютерди колдонуунун ыкмаларын классификациялоо (логикалык ыкмалар, так эсептөөлөр, алгебралык өзгөртүүлөр, далил боло алуучу эсептөөлөр) баяндалат. Жаңы түрүндө, ал классификациялоого кирбес алгоритм сунуш кылынат. Ал алгоритм чыгарылыштын бар болуусун жана касиеттерини талашсыз кылуу үчүн маселенин берилгендерин ыңгайлуу түрдө көрсөтөт. Аналитикалык функциялуу сызыктуу вольтерралык теңдемелер үчүн даражалуу катарлар усулдугу колдонулат. Макалада алгоритм түзүлгөн жана компьютерде жүзөгө ашырылган, паскаль тилинде программа берилет. Көбөйтүндүлүү интегралдык кошулуучулары болгон берилген теңдеме боюнча ал алгоритм чыгарылышынын жашоосун жана андагы каалаган туруктуулар болуусун аныктоо үчүн маалыматты берет. Ал алгоритм аналитикалык функциянын коэффициенттери үчүн дал келген айырмалык теңдемелер системасынын олуттуу ар түрдүү баштапкы теңдемелерин көрсөтөт.

Негизги сөздөр: *даражалуу катар, интегралдык теңдеме, сызыктуу теңдеме, Вольтерра тибиндеги теңдеме, алгоритм, аналитикалык функция.*

В статье излагается классификация известных способов применения компьютеров для доказательства теорем в математике (логические методы, точные вычисления, алгебраические преобразования, доказательные вычисления). Предлагается новый алгоритм, не входящий в эту классификацию - представление данных задачи в виде, который делает очевидными выводы о наличии и свойствах решения. Для исследования линейных вольтерровских уравнений с аналитическими функциями используется методика степенных рядов. В статье построен и реализован на компьютере алгоритм, который по заданному уравнению с интегральными слагаемыми представляет данные для определения существования решения и наличия в нем произвольных постоянных. Построена программа на языке паскаль. Этот алгоритм вычисляет и показывает начальные существенно различные уравнения в соответствующей системе разностных уравнений для коэффициентов аналитической функции.

Ключевые слова: *степенной ряд, интегральное уравнение, линейное уравнение, уравнение типа Вольтерра, алгоритм, аналитическая функция.*

A classification of methods (logic methods, exact computations, algebraic transformations and validating computations) to apply computers to prove theorems in mathematics is told in the paper. A new type of algorithms not of this classification is proposed in the paper. Such algorithms present data of task in a form which is convenient to make evident conclusions on existence and properties of solution. To investigate linear Volterra equations with analytical functions the method of power series is applied. An algorithm is constructed in the paper and is implemented on a computer. Given an equation with power coefficients by integral summands, the algorithm presents data to detect existence of solutions and occurrence of arbitrary constants in it. This algorithm presents initial, sufficiently different equations of the corresponding system of difference equations for coefficients of analytical function.

Key words: *power series, integral equation, linear equation, Volterra equation, algorithm, analytical functions.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Введение. Известны различные способы применения компьютерной техники в теоретической математике. По одной из неформальных классификаций, методы доказательства теорем с помощью компьютера можно разделить на: аксиоматически-логические; точные вычисления с целыми числами и подобными им объектами; алгебраические преобразования, в том числе - формульное дифференцирование и интегрирование; доказательные вычисления – получение строгих результатов приближенными вычислениями. В данной статье предлагается для некоторого класса задач алгоритм, который не дает полной формулировки теоремы, а так преобразует условие, что формулировка теоремы является очевидной для специалиста.

В [1] показана возможность нахождения достаточных условий существования решений некоторых типов интегро-дифференциальных уравнений с аналитическими функциями методом рядов. В [2] мы систематизировали такой переход от интегро-дифференциальных уравнений к системам разностных уравнений, в [3] мы описали структуру алгоритма для исследования таких разностных систем. В данной статье мы описываем построенную компьютерную программу, предлагаем такой полный алгоритм и приводим примеры его использования (кратко описано в [4]).

1. Постановка задачи.

Рассматриваются интегральные уравнения, левая часть которых представляет собой сумму слагаемых - операторов от неизвестной функции вида $bt^pI^mu(t), Iu := \int_0^t u(v)dv, p\geq 0$, правая часть является заданной аналитической функцией $f(t) = f[0] + f[1]t+\ldots$.

С использованием обозначения целочисленной функции - «ступеньки» $h[j]=0$ $(j<0)$; $h[j]=1$ $(j\geq 0)$ вводится обозначение - функция двух целочисленных переменных $A(m,n) = \frac{n!}{(n-m)!}h[n]h[n-m]$.

Также принимается правило «ноль*неопределенность=ноль».

Рассмотрим только «нерезонансный» случай: все величины $(p-m)$ для различных слагаемых различны.

2. Алгоритм.

Ввод: - натуральное число K – количество операторов в правой части уравнения; - последовательно для $k=1..K$: b_k – ненулевое целое число - числовой коэффициент в интегральном операторе; p_k - неотрицательное целое число - степень независимой переменной в коэффициентах при ли-нейных операторах; m_k – отрицательное целое число (порядок интегрирования) или ноль (сама функция);

Вычисления и действия: - последовательно для $k=1..K$ вычислить $I_k := p_k - m_k$; - изобразить получающееся интегральное уравнение для функции $u(t) = u[0] + u[1]t+\ldots$ (в записи случаи $b_k=-1$; случаи $p_k=0$ и $p_k=1$; случаи $m_k=-1$, $m_k=0$ и $m_k=1$ изображаются отдельно);

- изобразить систему разностных уравнений, к которым сводится интегральное уравнение. k-й член в уравнении дает в изображении член $b_kA(m_k, n-I_k)u[n-I_k]$; (справа находится выражение $f[n], n = 0,1,2,\ldots$; случай $I_k=0$ изображается отдельно);

- вычислить $n_0:=max\{m_k, I_k\}$ и изобразить уравнения из системы пункта 5), начиная с $n=0$ и заканчивая $n= n_0+1$.

В результате получается последовательность уравнений для $u[0], u[1], \ldots$ В нескольких первых уравнениях слева может быть ноль.

Для человека:

Проанализировать запись: если в нескольких первых уравнениях слева находится ноль, то они представляют необходимые условия на $f(t)$ (на первые коэффициенты $f[0], f[1], \ldots, f[k]$) для существования решения; определить, какие первые коэффициенты $u[0], u[1], \ldots$ могут быть выбраны произвольно так, чтобы последующие коэффициенты однозначно определялись через них и через $f[k]$), учитывая, что структура всех последующих уравнений такая же, как и у записанного (n_0+1)-го уравнения; таким

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

образом определить существование формального ряда для решения; исходя из структуры всех уравнений, начиная с (n_0+1)-го уравнения, найти область сходимости ряда для функции $u(t)$.

3. Текст программы на языке паскаль.

```
PROGRAM venera_1(input,  output);  USES CRT,  Dos;
var k,  j,  a_n,  a_d, n: integer; p,  b,  I,  I_, m: array[1..5] of integer;
b_, tp_:array[1..5] of string; a_, n_, nn_, nm_, m_, p_:string; and_, no_m:boolean;
procedure a_n_d(m1, n1:integer);
begin  and_:=false;  if (n1>=0) and (n1>=m1) then
begin and_:=true;  str(n1-m1, nm_); str(n1, nn_);  a_:=nn_+'!/'+nm_+'! *';
end; end;
begin {main} clrscr; writeln; writeln ('  Venera Ordinary IDE 2019');
write (' Input number of summands 2<= K <=5: '); readln(k);
for j:=1 to k do begin
write (' Input coef. b[', j:1, '],  t^p[', j:1, '],  int/dif m[', j:1, ']: ');
readln (b[j],  p[j],  m[j]); str(b[j], b_[j]); b_[j]:=b_[j]+'*';
if b[j]>0 then b_[j]:=' +'+b_[j];  if b[j]=-1 then b_[j]:='-';
if b[j]=1 then b_[j]:=' +'; tp_[j]:=' '; if p[j]=1 then tp_[j]:='t';
 if p[j]>1 then begin str (p[j], p_); tp_[j]:='t^'+p_ end;
I[j]:=p[j]-m[j]; I_[j]:=-I[j]; end;
writeln ('   Equation'); for j:=1 to k do begin
if m[j]=-1 then write (' ', b_[j],  tp_[j], ' int_0^t u(s)ds');
if m[j]<-1 then write (' ', b_[j],  tp_[j], ' (int_0^t)^', -m[j]:2, ' u(s)ds');
if m[j]=0 then write (' ', b_[j], tp_[j], ' u(t)');
if m[j]>1 then write (' ', b_[j],  tp_[j], ' D^', m[j]:2, ' u(t)');
if m[j]=1 then write (' ', b_[j],  tp_[j], ' D u(t)'); end; writeln(' = f(t)');
writeln (' System of equations for coefficients');
for j:=1 to k do begin n_:='n'; if I[j]<0 then n_:='n+';
if I[j]<>0 then write (' ', b_[j],  'A(', m[j]:2, ', ', n_, -I[j]:2, ') u[', n_, -I[j]:2, ']');
if I[j]=0 then write (' ', b_[j],  'A(', m[j]:2, ', ', n_, ') u[', n_, ']'); end;
writeln (' = f[n]'); writeln ('   First equations for coefficients');
for n:=0 to 10 do begin no_m:=true;
for j:=1 to k do begin a_n_d(m[j], n-I[j]);
if and_ then begin no_m:=false; write(' ', b_[j], a_, ' u[', n-I[j]:2, ']');
end; end;
if no_m then write ('  0 '); write (' = f[', n:2, ']'); writeln;
end; writeln (' ... '); readln; readln end.
```

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 12, 2019

4. Пример использования программы. Рассмотрим уравнение

$$tu(t) + 3\int_0^t u(s)ds - \int_0^t\int_0^s u(v)dvds = f(t). \quad (1)$$

Вводим соответствующие данные в программу:

Venera Ordinary IDE 2019

Input number of summands 2<= K <=5: 3
Input coef. b[1], t^p[1], int/dif m[1]: 1 1 0
Input coef. b[2], t^p[2], int/dif m[2]: 3 0 -1
Input coef. b[3], t^p[3], int/dif m[3]: -1 0 -2

и получаем результат:

Equation

+t u(t) +3 int_0^t u(s)ds - (int_0^t)^ 2 u(s)ds = f(t)*

System of equations for coefficients

*+A(0,n-1) u[n-1] +3*A(-1,n-1) u[n-1] -A(-2,n-2) u[n-2] = f[n]*

First equations for coefficients

0 = f[0]

*+0!/0! * u[0] +3*0!/1! * u[0] = f[1]*

*+1!/1! * u[1] +3*1!/2! * u[1] -0!/2! * u[0] = f[2]*

*+2!/2! * u[2] +3*2!/3! * u[2] -1!/3! * u[1] = f[3]*

… [аналогичные слагаемые]

*+9!/9! * u[9] +3*9!/10! * u[9] -8!/10! * u[8] = f[10]*

Из этой записи видно, что сначала определяется u[0], потом u[1], u[2], и т.д. Коэффициенты при u[n] больше 1, при этом коэффициенты при u[n–1] меньше 1. Итак, доказано, что если *f(0)=0,* то уравнение (1) имеет аналитическое решение *u(t)*, зависящее от одной произвольной постоянной *u'(0).* Его радиус сходимости такой же, как для функции *f(t).*

Литература:

1. Мураталиева В.Т. Спектральные свойства линейных вольтерров-ских интегро-дифференциальных уравнений третьего рода второго порядка // Наука вчера, сегодня, завтра: сб. статей по матер. XXXIV междунар. научно-практ. конф. - №5(27). Часть I. - Новосибирск: СибАК, 2016. - С. 57-61.
2. Панков П.С., Мураталиева В.Т. Спектральные свойства линейных задач с аналитическими функциями // Доклады НАН КР, 2016. - №1. - С.11-14.
3. Мураталиева В.Т. Алгоритм для исследования спектральных свойств линейных задач с аналитическими функциями // Вестник ЖАГУ, 2016. - №1 (32). - С. 55-59.
4. Muratalieva V.T. Method and algorithm to investigate integro-differential equations with analytical functions // Тезисы докладов Международной научной конференции «III Борубаевские чтения», посвященной 35-летию со дня образования Института математики НАН КР. - Бишкек, 2019. - С. 48.