DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 12, 2019

Бараталиев К.Б., Усарова Н.С., Жунусали кызы Д.

ЛОРАН, ФУРЬЕ, ТЕЙЛОР КАТАРЛАРЫНЫН ӨЗ АРА БАЙЛАНЫШТАРЫ

Бараталиев К.Б., Усарова Н.С., Жунусали кызы Д.

О СВЯЗИ МЕЖДУ РЯДАМИ ЛОРАНА, ФУРЬЕ И ТЕЙЛОРА

K.B. Barataliev, N.S. Usarova, Junusali kyzy D.

ON THE CONNECTION BETWEEN THE ROWS OF LAURENT, FOURIER AND TAYLOR

УДК: 517.2

Бул макалада ар кандай функционалдык мейкиндиктерде Лорандын, Фурьенин жана Тейлордүн катарларынын өз ара байланыштары жөнүндө изилдөө иштери жүргүзүлөт. Бирдик айлананы камтыган шакекче областында берилген функция регулярдуу болсо, анда ал функция Лорандын катарына ажырайт жана ал катар Фурьенин катарына эквиваленттүү. Гильберттин функциясынын жардамы менен свертка оператору тургузулат жана ал оператор Соболевдин мейкиндигиндеги Фурьенин катарын Хардинин мейкининдигин Тейлордун катарына айлантат. Андан башкасы, ошол эле оператор ар кандай мезгилдүү жалпыланган функциялардын теориясындагы Фурьенин катары Хардинин мейкининдеги Тейлордун катарына айланат да, аны бирдик тегеректин ичине регулярдуу уландысын түзөт. Харди мейкиндигинин элементтери эки кошулуучулардын суммасынан турат; ал кошулуучулар Тейлордун жана Лорандын катарларына окшош, бирок алар аталган катарлардын өздөрү бөлө алышпайт, себеби алардын коэффициенттери ар башка ыкмалар аркылуу аныкталышкан.

Негизги сөздөр: *регулярдык функция, шакекче област, проектор, функциянын ачкычы, функциянын мезгили, катарлар, свертка.*

В данной статье рассматриваются связи между рядами Лорана, Фурье и Тейлора в различных функциональных пространствах. Функция, регулярная в кольце, содержащем единичной окружности, разлагается в ряд Лорана, который эквивалентен ряду Фурье. С помощью функции Гильберта строится оператор свертки и он переводит ряд Фурье каждой функции из пространств Соболева в ряд Тейлора из пространств Харди. Далее, этот оператор отображает ряд Фурье всякой периодической обобщенной функции в ряд Тейлора из пространств Харди, причем функции из последнего допускают регулярное продолжение во внутренность единичного круга. Элементы пространства Харди состоят из суммы двух слагаемых, которые похожи на ряды Тейлора и Лорана, однако они не является таковыми, так как их коэффициенты определяются разными способами.

Ключевые слова: *регулярная функция, кольцо, проектор, носитель функции, периодическая функция, ряды, свертка.*

This article discusses the relationships between the series of Laurent, Fourier and Taylor in various. functional spaces. A regular function in a ring containing a unit circle is expanded in the Laurent series, which is equivalent to the Fourier series. Using the Hilbert function, the convolution operator is constructed and it transfers the Fourier series of each function from Sobolev spaces to Taylor series from Hardy spaces. Further, this operator maps the Fourier series of any periodic generalized function to the Taylor series from Hardy spaces, and the functions from the latter admit regular extension into the interior of the unit circle. Elements of the Hardy space consist of the sum of two terms, which are similar to the Taylor and Laurent series, but they are not so, since their coefficients are determined in different ways.

Key words: *regular function, ring, projector, function carrier, periodic function, series, convolution.*

Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце

$$\varepsilon_1 < |z| < 1 + \varepsilon_2 \quad (0 \le \varepsilon_1 < 1, \qquad \varepsilon_2 > 0), \tag{1}$$

содержащем единичной окружности $\Gamma = \{|z| = 1\}$. Тогда она представляется в этом кольце рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n \in Z} C_n z^n \tag{2}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

с коэффициентами

$$C_n = \frac{n!}{2\pi i}\int \frac{f(t)}{t^{b+1}}dt, \qquad n \in Z. \tag{3}$$

Если коэффициенты ряда Лорана определить, полагая $z = \varepsilon^{i\varphi}$, по формуле

$$C_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt, \qquad n \in Z, \tag{4}$$

то получаем разложение этой функции в ряд Фурье

$$f\left(e^{i\varphi}\right) = \sum_{n\in Z}\hat{f}(n)e^{int}. \tag{5}$$

обратно, если функция $\mathcal{F}(\varphi)$ представляется в виде

$$\mathcal{F}(\varphi) = f\left(e^{i\varphi}\right), \tag{6}$$

где функция $f(x)$ регулярна в кольце (1), то ряд (2) является рядом Лорана с коэффициентами (4).

Все свойства периодической функции (1) определяются ее значениями на отрезке $[a, a+T]$, где T – ее период, a − любая постоянная. Поэтому можно вместо изучения периодической функции, заданной при значениях аргумента $t\epsilon\mathbb{R}'$, ограничиться более простым рассмотрением функции, заданной на отрезке длины Г, а потом полученный результат распространить периодически на всю числовую ось. Напомним, что в теории обобщенных функции в качестве пространства основных функций на окружности Г будем , рассматривать множество $D(\Gamma)$ бесконечно дифференцируемых на Г функций φ таких, что $\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(T)$ $(n\epsilon N)$. То-есть, по существу, функции φ−бесконечно дифференцируемые в классическом смысле функции периода $T = 2\pi$. По определению $\varphi_i \to \varphi$ при $i \to \infty$ на окружности Г, если все последовательности $\varphi_i^{(n)}$ равномерно сходятся к $\varphi^{(n)}$ $(n\epsilon N)$. Так определенная топология является слабейшим из всех других топологий. Тогда $D(\Gamma)$ будет пазыватбся пространством основных функций, а $D'(\Gamma)$ − пространством обобщенных функций на окружности Г, т.е.линейные непрерывные функционалы , заданные на пространстве основных функций $D(\Gamma)$ таких,что $\langle\mathcal{F}, \varphi_i\rangle \to \langle\mathcal{F}, \varphi\rangle$, если только $\varphi_i \to \varphi$ в указанном выше смысле,.где $\mathcal{F} =$ элемент пространства $D'(\Gamma)$.

2. Известно ([1], стр. 120), что для функции $f(z) \in L^p(\Gamma)$, $\Gamma = \{|z| = 1\}$ ряд Фурье (5) сходится по норме пространства $L^p(\Gamma)$, где $1 < p < \infty$.

Введем в рассмотрение функцию Гильберта

$$H(x) = P.Y.ctg\frac{x}{2}, \quad x \in [-\pi; \pi], \tag{7}$$

где $P.Y.$означает «главное значение» интеграла по Коши [1].

Известно также ([1], стр. 133), что если определить свертку для функции $f \in L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ с функцией Гильберта:

$$(H * f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}(H * f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int f(x-e)ctg\frac{y}{2}dy =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}[f(x-y) - f(x+y)]\,ctg\frac{y}{2}dy, \tag{8}$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

где

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} ctg\dfrac{x}{2} & \text{при} \quad \varepsilon \le |x| \le \pi, \\ 0 \ \text{при} & 0 \le |x| \le \varepsilon, \end{cases} \tag{9}$$

то $(H * f)(x) \in L^p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$. Тогда ее ряд Фурье имеет вид

$$(H * f)(x) = \sum_{n \in Z} \left(\widehat{H * f}\right)(n) \cdot e^{inx} = \sum_{n \in Z} (-i \cdot sgnn)\hat{f}(n)e^{inx}, \tag{10}$$

где

$$\widehat{H}(n) = \frac{1}{2\pi}.$$

Образуем оператор

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}(I + \varepsilon + i \cdot H), \tag{11}$$

который обладает свойством ([1], стр. 121)

$$\hat{P}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x) \cdot e^{-inx}dx = \begin{cases} 1 \ \text{при} \quad n \ge 0, \\ 0 \ \text{при} \quad n < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Тогда оператор свертки $P * f$ является непрерывным проектором из $L^p(\Gamma)$ на пространство Харди $H^p(\Gamma)$, который состоит из элементов $f \in L^p(\Gamma)$ таких, что $\hat{f}(n) = 0$ при $n < 0$. Тогда имеем

$$(P * f)(x) = \sum_{n \in Z} \left(\widehat{P * f}\right)(n) \cdot e^{inx} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}. \tag{13}$$

Иначе говоря, этот оператор $P * f$ для каждого $p \in (1, \infty)$ ряды Фурье из $L^p(\Gamma)$ переводит в ряды Тейлора из $H^p(\Gamma)$.

Функции из $H^p(\Gamma)$ допускают регулярное продолжение во внутренность единичного круга $|z| \le 1$ [2].

3. Обозначим через $A(\Gamma)$ множество всех непрерывных функций $f \in C(\Gamma)$, ряды Фурье которых абсолютно сходятся. Иначе говоря, $A(\Gamma)$ является множеством сумм абсолютно сходящихся тригонометрических рядов:

$$\sum_{n \in Z} C_n e^{inx}, \qquad \sum_{n \in Z} |C_n| < \infty. \tag{14}$$

Множество $A(\Gamma)$ является банаховой коммутативный алгеброй с поточечной операцией умножения и нормой

$$\|f\|_{A(\Gamma)} = \sum_{n \in Z} |C_n|. \tag{15}$$

В качестве единичного элемента этой алгебры служит обычная постоянная функция 1.

Включение $A(\Gamma) \subset C(\Gamma)$ является строгим ([3], стр. 12). Здесь нет полного решения вопроса о возможности охарактеризовать элементы $A(\Gamma)$ непосредственно в терминах значений, принимаемых этими функциями. Однако известна следующая

Теорема ([**3**], стр. **12**). Свертка двух функций из $L^2(\Gamma)$ принадлежит пространству $A(\Gamma)$, обратно,

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

любая функция из $A(\Gamma)$ является сверткой двух функций из $L^2(\Gamma)$.

Таким образом любой элемент $f \in A(\Gamma)$ при $p = 2$ можно представить в виде $f(x) = (f_1 * f_2)(x)$, где $f_1 \in L^2(\Gamma)$ и $f_2 \in L^2(\Gamma)$. Тогда

$$(H * f)(x) = [(f_1 * f_2) * H](x)$$

и рядом Фурье такой свертки будет

$$(H * f)(x) = \sum_{n \in Z} (-i \cdot sgnn) \cdot \hat{f}(n) e^{inx} = \sum_{n \in Z} (-i \cdot sgnn) \cdot \widehat{f_1}(n) \cdot \widehat{f_2}(n) e^{inx}$$

Вспомним теперь, что оператор сверки $P * f$ является непрерывным проектором из $L^2(\Gamma)$ на H^2:

$$(P * f)(x) = \sum_{n \in Z} \left(\widehat{P * f}\right)(n) \cdot e^{inx} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \cdot e^{inx} = \sum_{n \in Z}^{\infty} (\widehat{f_1}(n) \cdot \widehat{f_2}(n)) e^{inx} \quad . \qquad (16)$$

Отметим, что элемент $(P * f)(x) = \big(P * (f_1 * f_2)\big)(x)$ является [3] элементом под алгебры $A^+(\Gamma)$ алгебры $A(\Gamma)$ и его можно представить в виде ряда Тейлора

$$f(x) = \sum_{n \in Z}^{\infty} \hat{f}(n) z^n = \sum_{n \in Z}^{\infty} \widehat{f_1}(n) \cdot \widehat{f_2}(n) z^n \ ,$$

который сходится на окружности $\mathrm{C}^+ = \{|z| = 1\}$.

Таким образом функция $f(z) = \mathcal{F}(e^{ix})$ допускает регулярное продолжение во внутренность единичного круга $|z| \leq 1$.Разложение функции в ряд Фурье по ортонормированному базису $\{e_n = z^n;\ n = 0, \pm 1, \ldots\}$ формально похоже на разложение Лорана в теории аналитических функций. Функция из H^2 похожи аналитическим функциям, например, всякая вещественная функция из H^2 является постоянной; произведение двух функций из H^2 принадлежит H^1. Заметим, что в образовании коэффициентов ряда Фурье принимают участие значения функции f на всем интервале периодичности, а в образовании коэффициентов ряда Тейлора и Лорана принимают участие только значения функции в окрестности точки, в которой производится разложение.

4. Введем в рассмотрение пространства Соболева $W^{m,\mathrm{p}}(\Gamma)$, которые для всякого целого числа $m \geq 0$ и всякого числа p, удовлетворяющего условиям $1 \leq p \leq \infty$, состоит из тех функций $f \in L^2(\Gamma)$, для которых все производные $f^{(k)}(z)$ $(0 \leq k \leq m)$ (в смысле теории обобщенных функций) принадлежат пространству $L^2(\Gamma)$, т. е. производная функции $f(x) \in L^2(\Gamma)$ m −го порядка определятся по формуле

$$\int f^{(k)}(z)\varphi(x)dx = (-1)^k \int f(x)\varphi^{(k)}(x)dx \quad \forall \varphi \in C^{\infty}(\Gamma)\ (k = 1,2, \ldots, m).$$

И нормы

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{k=0}^{m} \int \left|f_{(x)}^{(k)}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq k \leq m} \left\{ess \cdot sup_{x \in \Gamma} \left|f_{(x)}^{(k)}\right|\right\}, \ \ p = \infty,$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$W^{m,p}(\Gamma)$ являются банаховыми пространствами.

Ясно, что для $f \in W^{m,p}(\Gamma)$ имеем $(H * f)(x) \in W^{m,p}(\Gamma)$, поэтому ряд Фурье этого элемента будет

$$(H * f)(x) = \sum_{n \in Z} \left(\widehat{H * f}\right)(n) \cdot e^{inx}$$

и он сходится к f по норме пространства $W^{m,p}(\Gamma)$:

$$\lim_{n \to \infty} \|f - S_n\|_{W^{m,p}(\Gamma)} = 0,$$

где

$$S_n(x) = \sum_{|k| \le n} \hat{f}(k) \cdot e^{-inx}$$

есть $n-$няя частичная сумма Фурье.Следовательно, оператор свертки $P * f: W^{m,p}(\Gamma) \to H^p(\Gamma)$ действует по формуле

$$(P * f)(x) = \sum_{n \in Z} \left(\widehat{P * f}\right)(n) \cdot e^{inx} = \sum_{n \in Z}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx},$$

т. е. оператор $P * f$ переводит ряды Фурье из $W^{m,p}(\Gamma)^p(\Gamma)$ в ряды Тейлора в $H^p(\Gamma)$, причем функции из $H^p(\Gamma)$ допускают регулярное продолжение во внутренность единичного круга.

5. Очевидно, что справедливы строгие включения

$$D(\Gamma) = C^{\infty}(\Gamma) \subset A(\Gamma) \subset C(\Gamma) \subset W^{m,p}(\Gamma) \subset D'(\Gamma), \tag{17}$$

причем эти включения топологические, т. е. сходимость в топологии пространства, стоящего слева, влечет за собой сходимость в топологии пространства, стоящего справа.

Любая линейная непрерывная форма на $C^{\infty}(\Gamma) = D(\Gamma)$ является периодической обобщенной функции на Г, любая линейная непрерывная форма на $A(\Gamma)$ является периодический псевдомерой, а любая такая форма на $C(\Gamma)$ является периодической мерой Радона. Пространство Соболева $W^{m,p}(\Gamma)$ при любом p $(1 < p < \infty)$ является подпространством пространства периодических обобщенных функций $D'(\Gamma)$.

Заметим что для периодичности свертки двух обобщенных функций достаточно, чтобы одна из двух свертываемых обобщенных функций было периодической.Следовательно, свертка обобщенной функции Гильберта $H(x) = P.V.ctg\frac{x}{2}$ является периодический обобщенной функцией , т. е. $(P * f) \in D'(\Gamma)$. По определению имеем

$$\langle f * H, \varphi \rangle = \sum_{n \in Z} \langle H, \langle f, \varphi(x + 2\pi \cdot n) \rangle \rangle = = \sum_{n \in Z} \langle (f * H)(x - 2\pi \cdot n), \varphi \rangle \left(\varphi \in D(\Gamma)\right),$$

где функция $\text{ф}(x) = \sum_{n \in Z} \varphi(x - 2\pi \cdot n)$ $-$периодическая с периодом 2π.

Вычислим коэффициенты Фурье свертки $f * H$.Имеем

$$\left(\widehat{f * H}\right)(n) = \frac{1}{2\pi} \langle f * H, e^{-inx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, \langle H, e^{-in(x+y)} \rangle \rangle == \frac{1}{2\pi} \langle f_y, e^{-iny} \rangle \langle H_x, e^{-inx} \rangle$$
$$= 2\pi(-i \cdot sgnn) \langle f_y, e^{-iny} \rangle == 2\pi \cdot \hat{f}(n)(-i \cdot sgnn).$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Тогда рядом Фурье этой свертки будет

$$(f * H)(x) = \sum_{n \in Z} \left(\widehat{f * H}\right)(n) e^{inx} = 2\pi \sum_{n \in Z} (-i \cdot sgnn) \hat{f}(n)\, e^{inx}.$$

Если рассмотреть оператор $P * f$ из $D'(\Gamma)$ на пространство Харди $H(\Gamma)$, то

$$(P * f)(x) = \sum_{n \in Z} \left(\widehat{P * f}\right)(n) e^{inx} = 2\pi \sum_{n \in Z} \hat{f}(n)\, e^{inx}.$$

Таким образом, этот оператор $P * f$ отображает ряд Фурье всякой периодической обобщенной функции $f \in D'(\Gamma)$ в ряд Тейлора из пространств $H(\Gamma)$.

Литература:

1. Эдварде Р. Ряды Фурье в современном положении. - М.: Мир, 1985. - Т. 2. - 399 с.
2. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнение в свертках и проекционные методы их решение. - М.: Наука, 1971. - 352 с.
3. Кахан Ж.П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. - М.: Мир, 1976. - 204 с.