

Бекмаматов З.М.

**ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ $x = 0$ ТИП ӨЗГӨРҮҮ
СЫЗЫКТУУ КУРАМА ЖАНА ГИПЕРБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ
ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЖАЛГАШТЫРУУ МАСЕЛЕСИ**

Бекмаматов З.М.

**ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
СОСТАВНОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ ЧЕТВЕРТОГО
ПОРЯДКА С ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА $x = 0$**

Z.M. Bekmamatov

**CONJUGATION PROBLEM FOR EQUATIONS
OF COMPOSITE AND HYPERBOLIC TYPES OF THE FOURTH
ORDER WITH A LINE $x = 0$ OF CHANGE OF TYPE**

УДК: 517.956.6

Бул иште ийри сызыктуу аймакта төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболаалык типтеги теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселеси изилденген. Жекече туундулары менен берилген теңдемелер үчүн локалдуу эмес шарттуу жалгаштыруу маселелери курама системадагы түрдүү жылуулук физикалык мүнөздөгүчтүү жылуулук өткөрүмдүүлүк жараяндарынын математикалык модели катары колдонулат. Ушуга байланыштуу төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболаалык типтеги теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселесинин корректүүлүгүн изилдөө жана формулировкалоо илимий кызыгууну туудурат. Теңдемелердин чечимдерин табууда Гриндин жана Римандын функциялары усулдары колдонулду. Жалгаштыруу маселесинин бир маанилүү чечиминин жашашын аныктоодо Волтердин жана Фредгольмдун экинчи ролдогу интегралдык теңдемелерине келтирүү усулу, ошондой эле кысып чагылтуу принципти колдонулду. Алынган интегралдык теңдемелердин чечиминин жашоо шарттары табылды. Каралуучу аймактын камтылуучу аймактарында жардамчы маселелерди чечүүнүн негизинде, жалгаштыруу маселесинин чечиминин жашашы жана анын жалгыздыгынын жетиштүү шарттары табылды. Теңдеме тибин өзгөртүү сызыгындагы жабыштыруунун жана маселенин берилгендеринин жана жардамчы функциялардын ортосундагы катыштардын айкын шарттары берилди.

Негизги сөздөр: четки шарттар, Гриндин функциясы, Гурсанын маселеси, Римандын функциясы, Фредгольмдун теңдемеси, Вольтердин теңдемеси.

В данной работе сформулирована и исследована задача сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка в криволинейной области. Задачи с нелокальными условиями сопряжения для уравнений в частных производных используются как математической модели процесса теплопередачи в составной системе с разными теплофизическими характеристиками. В связи с этим, формулировка и исследование корректных задач сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка представляет научный интерес. При построении представления решений уравнений использован метод функции Грина и Римана. Для установления однозначной разрешимости задачи сопряжения использован метод сведения к интегральным уравнениям типов Вольтера и Фредгольма второго рода, а также принцип сжатых отображений. Найдены условия разрешимости полученных интегральных уравнений. На основе решения вспомогательных задач в соответствующих подобластях рассматриваемой области, найдено достаточные условия существования и единственности решения задачи сопряжения. Даны явные условия склеивания и соотношения между данными задачи и вспомогательными функциями на линии изменения типа уравнения.

Ключевые слова: краевые условия, функция Грина, задача Гурса, функция Римана, уравнение Фредгольма, уравнение Вольтера.

In this paper, we formulate and study the conjugation problem for the equation of composite and fourth-order hyperbolic types in a curvilinear region. Problems with nonlocal conjugation conditions for partial differential equations are used as a mathematical model of the heat transfer process in a composite system with different thermo physical characteristics. In this regard, the formulation and study of the correct conjugation problems for the equation of composite and hyperbolic types of the fourth order is of scientific interest. In constructing the representation of solutions of the equations, the Green and Riemann function method was used. To establish the unique solvability of the conjugation problem, we used the method of reducing to integral equations of Voltaire and Fredholm types of the second kind, as well as the principle of compressed mappings. The solvability conditions for the obtained integral equations are

found. Based on the solution of auxiliary problems in the corresponding subdomains of the considered region, sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the conjugation problem are found. Explicit bonding conditions and relations between the problem data and auxiliary functions on the line of change of the type of equation are given.

Key words: boundary value problem, function of Green, Goursat problem, Riemann function, equation of Fredholm, equation of Volter.

Пусть $D = D_1 \cup D_2$ – область на плоскости переменных (x, y) , где D_1 – криволинейный треугольник ABN , а D_2 – прямоугольник A_1B_1BA , причем $A(0, -1)$; $B(0, 1)$ $N(h, 0)$; $A_1(-h_1, -1)$; $B_1(-h_1, 1)$, $(h, h_1 = \text{const} > 0)$. Кроме того, дуги AN и NB определены достаточно гладкой возрастающей функцией $q(y): [-1, 1] \rightarrow [0, h]$, где $q(1) = 0$, $q(0) = h$; и $\{(q(y), y): -1 \leq y \leq 0; \quad 0 \leq y \leq 1\}$; $\Gamma = AN, NA$

Рассмотрим уравнения четвертых порядков вида

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (u_{xx} + u_{yy} + cu) = 0, \quad (1)$$

$$u_{xxxx} + a_1(x, y)u_{xxx} + a_2(x, y)u_{xxy} + b_1(x, y)u_{xx} + b_2(x, y)u_{xy} + c_1(x, y)u_x + c_2(x, y)u_y + d(x, y)u = 0, \quad (2)$$

в которых a_k, b_k, c_k ($k=1, 2$), a_{1xxx} , a_{2xxy} , b_{1xx} , b_{2xy} , c_{1xx} , $c_{2xy} \in C(\overline{D_2})$;

c – вещественное постоянное, причем

$$c \leq 0.$$

В дальнейшем рассматривается граничная задача: требуется определить решения уравнения (1) и (2) из класса $C^1(\overline{D}) \cap C^3(D) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{0+4}(D_1) \cup C^{3+1}(D_2)]$, при дополнительных условиях

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad u_y(x, 0) = f_2(x), \quad 0 < x < h, \quad (3)$$

$$u_y|_{\Gamma} = f_3(s), \quad (s - \text{длина дуги}) \quad (4)$$

$$u(x, -1) = \psi(x), \quad -h_1 \leq x \leq 0, \quad (5)$$

$$u(-h_1, y) = \psi_1(y), \quad (6)$$

$$u_x(-h_1, y) = \psi_2(y), \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (7)$$

в которых $f_1, f_2, f_3, \psi, \psi_1, \psi_2$ – заданные функции, причем будем считать что

$$f_1 \in C^2(ON), f_2 \in C^1(ON), f_3 \in C^2(\Gamma), \psi \in C^3[-h_1, 0], \psi_1 \in C^3[-1, 1], \psi_2 \in C^2[-1, 1], f_3(A) = \psi'(A), \psi(-h_1) = \psi_1(-1), \psi'(-h_1) = \psi_2(-1). \quad (8)$$

Легко заметить, что уравнения (1) принадлежит к составному, а (2) к гиперболическому типов. Граничные задачи для уравнения третьего и четвертого порядков смешанного и смешанно – составного типов рассмотрены в работах [1], [2]. Ниже рассматривается вопрос об однозначной разрешимости граничной задачи (1) – (7). Получены достаточные условия существования и единственности задачи.

Граничная задача (1) – (7) можно расщеплять на следующие самостоятельные задачи:

Задача 1. Требуется определить решение уравнение (1) из класса $C^2(\bar{D}_1) \cap [C^{2+2}(D_1) \cup C^{0+4}(D_1)]$, при условиях (3), (4) и условию

$$u_y(+0, y) = \tau'(y), \quad -1 \leq y \leq 1. \quad (9)$$

Задача 2. Требуется определить решение уравнение (2) из класса $C^2(\bar{D}_2) \cap C^{3+1}(D_2)$ при условиях (5) – (7) и условию

$$u(-0, y) = \tau(y), \quad -1 \leq y \leq 1. \quad (10)$$

При решении задачи 1 воспользуется общим представлением решением уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (u_{xx} + u_{yy}) = 0, \quad (11)$$

в виде

$$u(x, y) = u_0(x, y) + y\lambda(x) + \omega(x), \quad (12)$$

в котором $u_0(x, y)$ – гармоническая функция, а $\lambda(x)$ и $\omega(x)$ – достаточно гладкие функции в области D_1 , причем без ограничения общности можно полагать

$$\lambda(0) = \omega(0) = \lambda(N) = \omega(N) = 0. \quad (13)$$

В начале рассмотрим однородную задачу 1 для уравнения (11).

Нетрудно показать, что эта задача эквивалентна следующему уравнению

$$\mathcal{G}_{xx} + \mathcal{G}_{yy} = \lambda''(x), \quad (14)$$

с условиями

$$\mathcal{G}|_F = -\lambda(x), \quad \mathcal{G}|_{AB} = 0, \quad \mathcal{G}|_{ON} = -\lambda(x), \quad (15)$$

в котором

$$\mathcal{G} = u_y. \quad (16)$$

Из принципа экстремума для гармонических функций следует, что при наличии $\lambda(h) = \lambda'(0) = 0$ задача 1 для уравнения (14) не может иметь более одного решения.

Пусть $\Gamma = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$. Тогда принимая во внимание (3), (4) и (12) имеем

$$\mathcal{G}|_F = f_3 - \lambda[x(s)], \quad \mathcal{G}|_{ON} = f_2(x), \quad \mathcal{G}|_{AB} = \tau'(y), \quad 0 < x < 1. \quad (17)$$

По аналогии как в работе [2], решение задачи (14), (17) можно представлять формулой

$$\mathcal{G}(x, y) = \int_{-1}^1 \frac{\partial G(0, \eta; x, y)}{\partial \xi} \tau'(\eta) d\eta - \int_{\Gamma} f_3(s) \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \partial \eta - \frac{\partial G}{\partial \eta} \partial \xi \right) + \int_0^1 \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) \bigg|_{\eta=\sqrt{1-\xi^2}} \lambda(\xi) d\xi -$$

$$- \int_0^1 \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) \bigg|_{\eta=-\sqrt{1-\xi^2}} \lambda(\xi) d\xi, \quad (18)$$

в котором

$$G(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - \ln \left(\frac{r_4}{r_3} \right) \right] - \text{функция Грина:}$$

$$r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad r_2^2 = (x + \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

$$r_3^2 = (\bar{x} - \xi)^2 + (\bar{y} - \eta)^2, \quad r_4^2 = (\bar{x} + \xi)^2 + (\bar{y} - \eta)^2;$$

$$\bar{x} = \frac{x}{r^2}, \quad \bar{y} = \frac{y}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

В силу (12) и второго условия (17) будем иметь

$$\mathcal{G}(x, 0) + \lambda(x) = f_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (19)$$

Если учесть формулу (18), то (19) представляет собой уравнение вида

$$\lambda(x) + \int_0^1 K(x, \xi) \lambda(\xi) d\xi = F(x), \quad (20)$$

где

$$K(x, \xi) = \frac{4x\xi(x^2 - 1)}{\pi\sqrt{1-\xi^2}[(1+x^2)^2 - 4x^2\xi^2]};$$

$$F(x) = f_2(x) - \frac{x}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t^2 + x^2} - \frac{1}{1+t^2x^2} \right) \tau'(t) dt - \frac{2x(1-x^2)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_3(t) dt}{(1-x^2) + 4x^2t^2}.$$

Равенство (20) относительно $\lambda(x)$ является интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Таким образом установлено эквивалентность задачи 1, к интегральному уравнению (20), и при наличии теоремы единственности следует что, решение этой задачи существует

$$\lambda(x) = F(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \Gamma_1(x, \xi) F(\xi) d\xi, \quad (21)$$

где $\Gamma_1(x, \xi)$ – резольвента ядра $K(x, \xi)$.

Учитывая (12), (16) и интегрируя уравнение (1) по y , получим

$$\mathcal{G}_{xx} + \mathcal{G}_{yy} + c\mathcal{G} = \lambda''(x), \quad (22)$$

или

$$\mathcal{G}_{xx} + \mathcal{G}_{yy} = \lambda''(x) - c\mathcal{G}.$$

Легко заметить, что, задачу (1) можно редуцировать эквивалентным образом к решению интегрального уравнения

$$\mathcal{G}(x, y) - c \iint_{D_1} G(x, y; \xi, \eta) \mathcal{G}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \mathcal{G}_0(x, y), \quad (23)$$

и по принятым предположениям о данных задачи, однородное уравнение имеет только нулевое решение, а неоднородные всегда разрешимо [3], где $\mathcal{G}_0(x, y)$ – решение задачи 1 для уравнение (11). После интегрирование по y уравнение (1), а также учитывая формулу (12) имеем

$$u_{xx} + u_{yy} + cu = y\lambda''(x) + \omega''(x), \quad (24)$$

Устремляя x к нулю в равенстве (24) имеем

$$\tau''(y) = z(y), \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (25)$$

где

$$z(y) = y\lambda''(0) + \varpi''(0) - \mu(y) - c\tau(y). \quad (26)$$

Тогда в (25) считая $z(y)$ известной функцией рассмотрим задачу

$\tau(A) = \psi(0)$, $\tau'(B) = f_3(B)$. Решение этой задачи дается формулой

$$\tau(y) = m(y) + \int_{-1}^1 G_1(t, y) z(t) dt, \quad (27)$$

где

$$m(y) = \psi(0) + (y+1)f_3(B), \quad G_1(t, y) - \text{функция Грина.}$$

Перепишем уравнение (27) в виде

$$\tau(y) = -c \int_{-1}^1 G_1(t, y) \tau(t) dt + m_1(y), \quad (28)$$

где

$$m_1(y) = m(y) + \int_{-1}^1 G_1(t, y) [y\lambda''(0) + \varpi''(0) - \mu(t)] dt.$$

Легко заметить, что если

$$2 \max_{-1 \leq t, y \leq 1} |cG_1| < 1, \quad (29)$$

то уравнение (28) имеет единственное решение, которое можно записать в виде

$$\tau(y) = M(y) - \int_{-1}^1 \Gamma_2(t, y) \mu(t) dt, \quad (30)$$

где

$$M(y) = m(y) + \lambda''(0) \int_{-1}^1 \left(G_1(t, y) \lambda''(0) + \Gamma_2(y, t) m(t) + \int_{-1}^1 \Gamma_2(y, t') G_1(t', t) dt' \right) dt,$$

$$\bar{\Gamma}_2(t, y) = G_1(t, y) + \int_{-1}^1 \Gamma_2(y, t') G_1(t', t) dt'.$$

Из постановки задачи (1) – (7) легко заметить следующие условия сопряжения

$$\begin{aligned} u(+0, y) = u(-0, y) = \tau(y), \quad u_x(+0, y) = u_x(-0, y) = v(y), \\ u_{xx}(+0, y) = u_{xx}(-0, y) = \mu(y), \quad -1 \leq y \leq 1, \end{aligned} \quad (31)$$

в котором $\tau(y)$, $v(y)$, $\mu(y)$ – пока считаются неизвестными функциями.

При решении задачи (2), (5) и (31) используя методы работы [4] можно получить формулу представления

$$\begin{aligned} u(x, y) = \Phi(x, y) + \int_0^y \left[R(x, y; 0, \eta) \mu'(\eta) + a_1(0, \eta) \cdot R(x, y; 0, \eta) \mu(\eta) - B(x, y; \eta) v'(\eta) - C(x, y; \eta) v(\eta) + \right. \\ \left. + D(x, y; \eta) \tau'(\eta) + E(x, y; \eta) \tau(\eta) \right] d\eta, \end{aligned} \quad (32)$$

где $R(x, y; \xi, \eta)$ – функция Римана для уравнения (2), а

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= R_{\xi\xi}(x, y; x, 0) \psi(x) - \int_0^x A(x, y; \xi) \psi(\xi) d\xi, \\ A(x, y; \xi) &= R_{\xi\xi\xi}(x, y; \xi, 0) - a_2(\xi, 0) R_{\xi\xi}(x, y; \xi, 0) + (b_2(\xi, 0) - 2a_{2\xi}(\xi, 0)) R_\xi(x, y; \xi, 0) + (b_{2\xi}(\xi, 0) - \\ &- c_2(\xi, 0) - a_{2\xi\xi}(\xi, 0)) R(x, y; \xi, 0), \\ B(x, y; \eta) &= R_\xi(x, y; 0, \eta) - a_2(0, \eta) \mathcal{G}(x, y; 0, \eta) \\ C(x, y; \eta) &= a_1(0, \eta) \cdot R_\xi(x, y; 0, \eta) + (a_{1\xi}(0, \eta) - b_1(0, \eta)) R(x, y; 0, \eta), \\ D(x, y; \eta) &= R_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta) - a_2(0, \eta) R_\xi(x, y; 0, \eta) - (a_{2\xi}(0, \eta) - b_2(0, \eta)) R(x, y; 0, \eta), \\ E(x, y) &= a_1(0, \eta) \cdot R_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta) + (2a_{1\xi}(0, \eta) - b_1(0, \eta)) R_\xi(x, y; 0, \eta) + (a_{1\xi\xi}(0, \eta) - b_{1\xi}(0, \eta) + c_1(0, \eta)) \times \\ &\times R(x, y; 0, \eta). \end{aligned}$$

Подставляя формулу (32) в (6) и (7), получим два соотношения для $\tau(y)$, $v(y)$ и $\mu(y)$

$$\begin{aligned} R(-h, y; 0, y) \mu(y) - B(-h, y, y) v(y) + D(-h, y, y) \tau(y) + \int_0^y (d_{11}(y, h) \mu(\eta) + d_{12}(y, \eta) v(\eta) + \\ + d_{13}(y, \eta) \tau(\eta)) d\eta = f_1(y), \end{aligned} \quad (33)$$

$$R_x(-h, y; 0, y)\mu(y) - B_x(-h, y, y)v(y) + D_x(-h, y, y)\tau(y) + \int_0^y (d_{21}(y, \eta)\mu(\eta) + d_{22}(y, \eta)v(\eta) + d_{23}(y, \eta)\tau(\eta))d\eta = f_2(y), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} d_{11}(y, \eta) &= -R_\eta(-h, y; 0, \eta) + a_1(0, \eta)R(-h, y; 0, \eta), \quad d_{12}(y, \eta) = B_\eta(-h, y, \eta) - C(-h, y, \eta), \\ d_{13}(y, \eta) &= E(-h, y, \eta) - D_\eta(-h, y, \eta), \quad d_{21}(y, \eta) = -R_{\eta x}(-h, y; 0, \eta) + a_1(0, \eta)R_x(-h, y; 0, \eta), \\ d_{22}(y, \eta) &= B_{\eta x}(-h, y, \eta) - C_x(-h, y, \eta), \quad d_{23}(y, \eta) = E_x(-h, y, \eta) - D_{\eta x}(-h, y, \eta), \\ f_1(y) &= \psi_1(y) - \Phi(-h, y) + D(-h, y, 0)\tau(0) + R(-h, y; 0, 0)\psi'''(0) - B(-h, y, 0)\psi(0), \\ f_2(y) &= \psi_2(y) - \Phi_x(-h, y) + R_x(-h, y; 0, 0)\psi_1''(0) - B_x(-h, y, 0)\psi'(0) - D_x(-h, y, 0)\psi(0). \end{aligned}$$

Обозначая

$$Q(y, h) = \begin{Bmatrix} R & -B \\ R_x & -B_x \end{Bmatrix}, K(y, h) = \begin{Bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{Bmatrix}, f = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}, T\tau = \begin{Bmatrix} -D\tau - \int_0^y d_{13}\tau(\eta)d\eta \\ -D_x\tau - \int_0^y d_{23}\tau(\eta)d\eta \end{Bmatrix}, \rho(y) = \begin{Bmatrix} \mu(y) \\ v(y) \end{Bmatrix}.$$

Пусть

$$\det Q \neq 0 \quad (36)$$

И так, в силу принятые обозначения уравнения (33) и (34) можно переписать в виде

$$\rho(y) + \int_0^y K^0(y, \eta)\rho(\eta)d\eta = f_0(y), \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} f_0(y) &= Q^{-1} \| f + T\tau \| \quad Q^{-1} = \begin{Bmatrix} B_x & B \\ R_x & R \end{Bmatrix} Q^{-1}T\tau = \begin{Bmatrix} c_{11}\tau + c_{12}\int_0^y \tau(\eta)d\eta \\ c_{21}\tau + c_{22}\int_0^y \tau(\eta)d\eta \end{Bmatrix} \\ c_{11} &= -B_x D - B D_x, \quad c_{21} = -R_x D - R D_x, \\ c_{12} &= B_x d_{12} + B d_{23}, \quad c_{22} = R_x d_{13} + R d_{23}, \quad K^0(y, \eta) = Q^{-1}K(y, \eta) = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Далее, исключая $\tau(y)$ из (30) и (37), получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}\mu(y) &= -\int_0^y k_{11}(y, \eta) \mu(\eta) d\eta - \int_0^y k_{12}(y, \eta) v(\eta) d\eta + M_1(y) - \int_{-1}^1 \Phi_1(t, y) \mu(t) dt, \\ v(y) &= -\int_0^y k_{21}(y, \eta) \mu(\eta) d\eta - \int_0^y k_{22}(y, \eta) v(\eta) d\eta + M_2(y) - \int_{-1}^1 \Phi_2(t, y) \mu(t) dt,\end{aligned}\quad (38)$$

где

$$\begin{aligned}M_1(y) &= c_{11} M(y) + c_{12} \int_0^y M(\eta) d\eta, \quad M_2(y) = c_{21} M(y) + c_{22} \int_0^y M(\eta) d\eta, \\ \Phi_1(t, y) &= c_{11} \bar{F}_2(t, y) + c_{12} \int_0^y \bar{F}_2(t, \eta) d\eta, \quad \Phi_2(t, y) = c_{21} \bar{F}_2(t, y) + c_{22} \int_0^y \bar{F}_2(t, \eta) d\eta.\end{aligned}\quad (39)$$

Решая Вольтерровские части уравнения (38) как в первом, так и во втором относительно $\mu(y)$ и $v(y)$ соответственно будем

$$\begin{aligned}\mu(y) &= -\int_0^y N_1(y, \eta) v(\eta) d\eta - \int_{-1}^1 N_2(y, t) \mu(t) dt + \tilde{M}_{12}(y), \\ v(y) &= -\int_0^y N_3(y, \eta) \mu(\eta) d\eta - \int_{-1}^1 N_4(y, t) \mu(t) dt + \tilde{M}_{22}(y),\end{aligned}\quad (40)$$

Подставляя значение функции $v(y)$ из второе уравнение (40) в правую часть первое будем иметь

$$\mu(y) = \int_0^y N_5(y, \eta) \mu(\eta) d\eta + \int_{-1}^1 N_6(y, \eta) \mu(\eta) d\eta + \tilde{M}_{12}(y) + \int_0^y N_1(y, \eta) \tilde{M}_{22}(\eta) d\eta, \quad (41)$$

в котором

$$N_5(y, \eta) = \int_{\eta}^y N_1(y, t) N_3(t, \eta) dt, \quad N_6(y, \eta) = \int_0^y N_1(y, t) N_4(t, \eta) dt + N_2(y, \eta).$$

Уравнению (41) можно придать вид

$$\mu(y) = \int_0^y N_5(y, \eta) \mu(\eta) d\eta + \int_{-1}^1 N_6(y, \eta) \mu(\eta) d\eta + \Psi(y), \quad (42)$$

где

$$\Psi(y) = \tilde{M}_{12} + \int_0^y N_1(y, \eta) \tilde{M}_{22}(\eta) d\eta.$$

В результате однозначной обратимости Вольтерровской части в уравнение (42), оно приводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\mu(y) = \alpha(y) + \int_{-1}^1 S(y, \eta) \mu(\eta) d\eta, \quad (43)$$

где

$$S(y, \eta) = N_6(y, \eta) + \int_0^y P_0(y, t) N_6(t, \eta) dt,$$

$$\alpha(y) = \Psi(y) + \int_0^y P_0(y, t) \Psi(t) dt, \quad P_0(y, t) - \text{резольвента ядра } N_5(y, \eta).$$

Пусть

$$2 \max_{-1 \leq y, t \leq 1} |P_0(y, t)| < 1, \quad (44)$$

Тогда определяя функцию $\mu(y)$, из уравнение (40) находим функцию $\nu(y)$, и тем самым решается задача 2.

Исходя из выше изложенного нетрудно показать, что решение граничной задачи (1) – (7) можно редуцировать к решению интегрального уравнения (23). Если $R^0(x, y; \xi, \eta)$ резольвента ядра $s \cdot G(x, y; \xi, \eta)$, то решение уравнения (23) можно представить формулой

$$\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}_0(x, y) + \iint_{D_1} R^0(x, y; \xi, \eta) \mathcal{G}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (45)$$

Решение задачи (1) – (7) в области D_1 имеет вид

$$u(x, y) = \int_0^y \mathcal{G}(x, \eta) d\eta + f_1(x),$$

(46)

в котором $\mathcal{G}(x, \eta)$ решение задачи (14), (17).

Имеет место следующее:

Теорема. Если выполняются условия (8), (29), (36) и (44) то граничная задача (1) – (7) однозначно разрешима и её решение в областях D_1 и D_2 даются формулами (46) и (32) соответственно.

Литература:

1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. - М: Изд-во АН СССР, 1959. - 164 с.
2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. -Ташкент: Изд-во «Фан» Узбекской ССР, 1979. - 236 с.
3. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. - Москва: Изд-во «Наука», 1966. - 204 с.
4. Сопуев А. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка и уравнения смешанного типа. / Дисс. ... докт.физ.-мат. наук, Бишкек, 1996. - 235 с.