DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

НАУКА, НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИИ КЫРГЫЗСТАНА, № 12, 2019

Аширбаева А.Ж., Садыкова Г.К.

КОШУМЧА АРГУМЕНТ КИЙИРҮҮ УСУЛУН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫ ҮЧҮН ЖАЙЫЛТУУ

Аширбаева А.Ж., Садыкова Г.К.

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

A.J. Ashirbaeva, G.K. Sadykova

DEVELOPMENT OF THE METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT FOR A SYSTEM OF NON-LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

УДК: 517.968.4

Теңдемелер системасы үчүн Коши маселеси каралган жана маселени чечүү үчүн кошумча аргумент өркүндөтүлгөн методикасы колдонулган. Баштапкы маселе биринчи тартиптеги жеке туундулуу дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн каралды. Каралып жаткан метод боюнча мурда алынган жыйынтыктардын натыйжасында изилденип жаткан маселенин актуалдуулук деңгээли негизделген. $\overline{C}^{\alpha_1,\dots\alpha_l}$ Lip(N|u,M|v, ...) функциялар классы колдонулду. Сызыктуу эмес жеке туундулуу дифференциалдык тендемелер системасы үчүн баштапкы маселелер интегралдык теңдемелердин эквиваленттүү системасына келтирилген. Ал эми интегралдык теңдемелердин системасынын вектордук тендеме түрүндө жазылышы кысып чагылтуулар принцибин колдонууга мүмкүндүк берет жана теңдеме жалгыз чечимге ээ экендиги келип чыгат. Алынган жыйынтыктар кошумча аргумент методу сызыктуу эмес биринчи тартиптеги жеке туундулуу көп өзгөрмөлүү дифференциалдык тендемелер системасын чечүү үчүн да колдонуларын күбөлөндүрөт.

Негизги сөздөр: *дифференциалдык тендемелер, жеке туунду, сызыктуу эмес теңдеме, ыкма, кошумча аргумент, Коши маселеси, принцип, кысып чагылтуулар.*

В работе рассматривается задача Коши для систем уравнений и для решения задачи используется развитая методика дополнительного аргумента. Рассмотрена начальная задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Дается обзор ранее полученных результатов по рассматриваемому методу и на этом обоснована степень актуальности исследуемой задачи. Был использован класс функций $\overline{C}^{\alpha_1,\dots\alpha_l}$, Lip(N|u,M|v, ...). Начальные задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сведены к эквивалентным системам интегральных уравнений. Запись систем интегральных уравнений в виде одного векторного уравнения позволяет применить принцип сжимающих отображений, откуда следует, что уравнение имеет одно и только одно решение. Полученные результаты свидетельствуют о том, что метод дополнительного аргумента применим и для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными.

Ключевые слова*: дифференциальное уравнение, частные производные, нелинейное уравнение, метод, дополнительный аргумент, задача Коши, принцип, сжимающие отображения.*

In the work, the Cauchy problem for systems of equations is considered and a developed method of an additional argument is used to solve the problem. A review of previously obtained results by the method under consideration is given and the degree of relevance of the problem under study is justified on this. Was used the class of functions $\overline{C}^{\alpha_1,\dots\alpha_l}$, Lip(N|u,M|v, ...). The initial problems for systems of nonlinear partial differential equations are reduced to equivalent systems of integral equations. Writing systems of integral equations in the form of a single vector equation allows us to apply the principle of contraction mappings, which implies that the equation has one and only one solution. The results obtained indicate that the additional argument method is also applicable to solving a system of nonlinear partial differential equations of the first order with many variables.

Key words: *differential equation, partial derivatives, nonlinear equation, method, additional argument, Cauchy problem, principle, compressive maps.*

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Рассмотрим решение системы дифференциальных уравнений (СДУ) в частных производных (ЧП) первого порядка, где коэффициенты при ЧП первого порядка зависят от неизвестных функций.

Решение рассматриваемой СДУ исследуется методом дополнительного аргумента (МДА): составляется система интегральных уравнений (ИУ) эквивалентная исходной системе, к которой применяется принцип сжатых отображений. Такие применения МДА для СДУ в ЧП были приведены в работах М.И. Иманалиева, С.Н. Алексеенко, Т.М. Иманалиева, А.Ж. Аширбаевой и др.

Рассмотрим следующую задачу Коши для СДУ в ЧП первого порядка:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}=$$

$$= f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n)), \qquad (1)$$

$$i=1,2,..,n, \quad (t,x_1,..,x_n)\in G_{n+1}(T)=[0,T]\times R^n$$

$$u_i(0,x_1,..,x_n)=\varphi_i(x_1,..,x_n), \quad i=1,2,..,n, \quad (x_1,..,x_n)\in R^n, \qquad (2)$$

Исследование решения системы (1) вида

$$a_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)=u_i(t,x_1,..,x_n), \quad i=1,..,n.$$

проводилось в [1].

В [2] использован МДА для (1), (2) с $a_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)=a_i(t,x_1,...,x_n,u_{n-1})$.

Используя пространства функций $\overline{C}^{\alpha_1,...,\alpha_l}$, $Lip(N|_u,M|_v,...)$ из [1,2], докажем следующую теорему:

Теорема. Для функции $\varphi_i(x_1,...,x_n)\in\overline{C}^1(R^n)$,

$a_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)$, $f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\in\overline{C}^{0,\underbrace{1,...,1}_{n\,раз},\underbrace{1,...,1}_{n\,раз}}(G_{n+1}(T)\times R^n)$. i=1,2,..,n, существует постоянная T^*, определенная из исходных данных такая, что $0\le T^*\le T$ решение задачи (1),(2) существует и единственно в $G_{n+1}(T^*)$.

Докажем сначала эквивалентность задачи (1), (2) со следующей системой ИУ:

$$u_i(t,x_1,...,x_n)=\varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),...,p_n(0,t,x_1,...,x_n))+$$

$$+\int_0^t f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),u_1(\nu,p_1,...,p_n),....,u_n(\nu,p_1,...,p_n))d\nu \qquad (3)$$

$$p_i(s,t,x_1,...,x_n)=x_i-\int_s^t a_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n,u_1(\nu,p_1,...,p_n),...u_n(\nu,p_1,...,p_n))d\nu \qquad (4)$$

$$i=1,2,..,n, \quad (s,t,x_1,..,x_n)\in Q_{n+2}(T)=\{(s,t,x_1,..,x_n)\,|\,0\le s\le t\le T,\,(x_1,..,x_n)\in R^n\}.$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

Применение МДА для СДУ в ЧП было развито в [2]. Предложена удобная схема применения, которая в настоящее время широко применяется в исследованиях, касающихся построения решений СДУ в ЧП.

Используя МДА решение задачи (1), (2) сводим к системе ИУ (3), (4) (см. раб [2]).

Теперь дифференцируя (3), (4), имеем:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}=$$

$$=f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n))+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\left[\frac{\partial p_i(0,t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial p_i(0,t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}\right]+$$

$$+\int_0^t\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\left[\frac{\partial p_l(\nu,t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial p_l(\nu,t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}\right]d\nu+$$

$$+\int_0^t\sum_{r=1=}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial u_r}\frac{\partial u_r}{\partial x_l}\left[\frac{\partial p_l(\nu,t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial p_l(\nu,t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}\right]d\nu. \quad (5)$$

Из (4) следует:

$$\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\frac{\partial p_l(s,t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}=0, \quad (6)$$

$$p_i(t,t,x_1,...,x_n)=x_i,\ i=1,2,..,n.$$

Учитывая (6), из (5) получается уравнение (1). Система ИУ (3),(4) удовлетворяет условию (2).

Заменим в (3) переменную t через s, переменные x_i через $p_i(s,t,x_1,...,x_n),\quad i=1,2,...,n.$

Используем следующее равенство:

$p_i(s,t,x_1,...,x_n)=p_i(s,\tau,p_1(\tau,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\tau,t,x_1,...,x_n))$, имеем:

$$u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))=\varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),...,p_n(0,t,x_1,...,x_n))+$$

$$+\int_0^s f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),u_1(\nu,p_1,...,p_n),....,u_n(\nu,p_1,...,p_n))d\nu \quad (7)$$

Введя обозначение

$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)=u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))$. из (7), (4) имеем следующую систему ИУ:

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

$$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)=\varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),...,p_n(0,t,x_1,...,x_n))+$$
$$+\int_0^s f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),\omega_1(s,t,x_1,...,x_n),....,\omega_n(s,t,x_1,...,x_n))d\nu \quad (8)$$

$$p_i(s,t,x_1,...,x_n)=x_i-\int_s^t a_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n,\omega_1(s,t,x_1,...,x_n),....,\omega_n(s,t,x_1,...,x_n))d\nu \quad (9)$$

Система ИУ (8), (9) имеет единственное решение, принадлежащее

$$\overline{C}^{\underbrace{1,1,...,1}_{n\,раз},\underbrace{1,...,1}_{n\,раз}}([0,T]\times[0,T]\times R^{2n}).$$

Для этого запишем систему ИУ (8),(9) в виде:

$$\theta(s,t,x_1,x_2,...,x_n)=A(s,t,x_1,x_2,...,x_n;\theta), \quad (10)$$

в котором $\theta=(\theta_0^1,\theta_0^2,...,\theta_0^n,\theta_1^1,\theta_1^2,...,\theta_1^n)$ - функция переменных $(s,t,x_1,x_2,\dots,x_n)$, компоненты которой есть искомые функции $\theta_0^i=p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, $\theta_1^i=\omega_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, $i=1,2,...,n,$ а компоненты оператора $A=(A_0^1,A_0^2,...,A_0^n,A_1^1,A_1^2,...,A_1^n)$ определяются равенствами:

$$A_0^i\theta=x_i-\int_s^t a_i(\nu,\theta_0^1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,\theta_0^n(\nu,t,x_1,...,x_n),\theta_1^1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,\theta_1^n(\nu,t,x_1,...,x_n))d\nu,$$
$i=1,2,...,n.$

$$A_1^i\theta=\varphi_i(\theta_0^1(0,t,x_1,...,x_n),...,\theta_0^n(0,t,x_1,...,x_n))+$$
$$+\int_0^s f_i(\rho,\theta_0^1(\rho,t,x_1,...,x_n),...,\theta_0^n(\rho,t,x_1,...,x_n),\theta_1^1(\rho,t,x_1,...,x_n),....,\theta_1^n(\rho,t,x_1,...,x_n)d\rho,$$

Обозначим $M=\max\{\max\{\|a_i\|_{Q_{n+2}(T)}T,\|\varphi_i\|_{R^n}+\|f_i\|_{Q_{n+2}(T)}T\}:i=1,...n\}.$

Покажем, что уравнение (10) при достаточно малом $T^*<T$ имеет в шаре $S:\rho(\theta_x,\theta)\le M$ единственное решение.

Имеем при $t\le T^*\le T$:

$$\|A_0^i\theta-x_i\|\le\|a_i\|_{Q_{n+2}(T)}T;\|A_1^i\theta\|\le\|\varphi_i\|+\|f_i\|_{Q_{n+2}(T)}T,i=1,...,n,$$

то есть оператор *A* отображает шар *S* в себя.

Далее,

$$\left|A_0^i\theta^1-A_0^i\theta^2\right|\le\Omega_{0i}(T)\rho(\theta^1,\theta^2),\qquad\left|A_1^{\,i}\theta^1-A_1^{\,i}\theta^2\right|\le\Omega_{i1}(T)\rho(\theta^1,\theta^2),$$

DOI:10.26104/NNTIK.2019.45.557

где $\Omega_{0i}(S) = (\sum_{k=1}^{n} L_k^i + K_k^i)S;\quad \Omega_{1i}(S) = \sum_{k=1}^{n} H_k^i S + \sum_{k=1}^{n} (M_k^i + N_k^i)S, i = 1,...,n,$

$$a_i(t, x_1, x_2,..., x_n, u_1,..., u_n) \in Lip(L_1^i\big|_{x_1}, L_2^i\big|_{x_2},..., L_n^i\big|_{x_n}, K_1^i\big|_{u_1}, K_2^i\big|_{u_2},..., K_n^i\big|_{u_n}),$$

$$\varphi_i(x_1,..., x_n) \in Lip(H_1^i\big|_{u_1}, H_2^i\big|_{u_2},..., H_n^i\big|_{u_n}),\ H_j^i > 0 - const,\ i, j = 1,2,..., n,$$

$$f_i(t, x_1,..., x_n, u_1, u_2,..., u_n) \in Lip(M_1^i\big|_{x_1}, M_2^i\big|_{x_2},..., M_n^i\big|_{x_n}, N_1^i\big|_{u_1}, N_2^i\big|_{u_2},..., N_n^i\big|_{u_n}),$$

$M_j^i > 0 - const,\ N_j^i > 0 - const, i,j = 1,2,...,n.$

Отсюда следует, что оператор A при

$T^* = \min\{\Lambda(T; \Omega_{1i}(S) : S) : j = 0,1; i = 1,..., n\}$ осуществляет сжатое отображение шара S на себя.

Следовательно, по принципу сжимающих отображений уравнение (10) имеет одно и только одно решение. Теорема доказана.

Получены условия существования единственного решения применением и развитием МДА, применение которого наиболее эффективно для данного класса задач.

Литература:

1. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Доклады АН. - 1992. - Т. 325. - №6. - С.1111-1115.
2. Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными. // Международный научно-исследовательский жур. 2018. - №3(69). - С. 6-10.