МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Байзаков А.Б., Кыдыралиев Т.Р., Шаршенбеков М.М.

КОШИ ТИБИНДЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН АСИМПТОТИКАЛЫК ТУРУКТУЛУУГУ ЖАНА ТҮЗҮЛҮШҮ

Байзаков А.Б., Кыдыралиев Т.Р., Шаршенбеков М.М.

СТРУКТУРА И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОШИ

A.B. Baizakov, T.R. Kydyraliev, M.M. Sharshenbekov

STRUCTURE AND ASYMPTOTIC STABILITY OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CAUCHY-TYPE INTEGRALS

УДК: 517.2

Бул макалада Коши тибиндеги дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын асимптотикалык туруктулуугу жана түзүлүшү каралган. Жаңы сызыктуу дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын асимптотикалык туруктулуугунун жетишээрлик шарттары табылган жана Коши тибиндеги дифференциалдык теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышы түзүлгөн. Коши тибиндеги сызыктуу дифференциалдык тендемелер системасынын жаңы классындагы белгилүү өзгөрүлмө матрица- функция Лаппо-Данилевский шартын канааттандырат. Бул учурда, сызыктуу системасынын асимптотикалык туруктуулугун пределдик матрицанын өздүк маанилеринин комплекс тегиздигиндеги жайланышы боюнча бааланат. Баалоолор функциянын модулунун максимуму боюнча, башкача айтканда белгилүү норма менен жүзөгө ашырылат. Өзгөрмөлүү коэффициенттүү сызыктуу дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын $t \to \infty$ болгондо асимптотикалык туруктулуугунун жетишээрлик шарттары табылды. Көрсөтмө мисал түзүлгөн.

Негизги сөздөр: *асимптотикалык туруктулуук, дифференциалдык теңдемелер, жетишерлик шарттар, Лаппо-Данилевский учуру, жалпы чыгарылышы, интегралдык сүрөттөлүшү, Коши маселесинин чыгарылышы.*

В данной работе исследована структура и асимптотическая устойчивость решений систем дифференциальных уравнений типа Коши. Для нового класса систем линейных дифференциальных уравнений найдены достаточные условия асимптотической устойчивости решений и кроме того, построено общее решение системы дифференциальных уравнений типа Коши. Известная переменная матрица-функция нового класса линейных систем дифференциальных уравнений типа Коши удовлетворяет условию типа Лаппо-Данилевского. В этом случае об асимптотической устойчивости решений линейной системы судят по расположениям собственых значений предельной матрицы в комплексной плоскости. Оценки производиться по известной норме, т.е по максимуму модуля функции. Найдены достаточные условия асимптотической устойчивости линейной системы с переменными коэффициентами при $t \to \infty$. Построен иллюстративный пример.

Ключевые слова: *асимптотическая устойчивость, дифференциальные уравнения, достаточные условия, случай Лаппо-Данилевского, общее решение, интегральное представление, решения задачи Коши.*

In this paper, we investigated the structure and asymptotic stability of solutions of systems of differential equations of Cauchy type. For a new class of systems of linear differential equations, sufficient conditions for the asymptotic stability of solutions were found and, in addition, a general solution was constructed for a system of Cauchy type differential equations. The well-known variable matrix function of a new class of linear systems of differential equations of Cauchy type satisfies a Lappo – Danilevskii type condition. In this case, the asymptotic stability of solutions of a linear system is judged by the locations of the eigenvalues of the limit matrix in the complex plane. Estimates are made at a known rate, that is, by the maximum of the modulus of the function. Sufficient conditions for the asymptotic stability of a linear system with variable coefficients are found for. An illustrative example is built.

Key words: *asymptotic stability, differential equations, sufficient condition, Lappo-Danilevsky case, the general solution, integral representation, solution of the Cauchy problem.*

Известно [1, с. 117], что если матрица $P(t)$ коммутирует со своим интегралом, т.е.

$$P(t)\cdot\int_{t_0}^{t}P(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t}P(\tau)d\tau\cdot P(t) \qquad (1)$$

при $t\geq t_0$ (случай Лаппо-Данилевского), то решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x, \qquad (2)$$

где $P(t)\in C[t_0,\infty)$ выражается формулой

$$x(t)=\exp\int_{t_0}^{t}P(\tau)d\tau\cdot x(t_0). \qquad (3)$$

Интегральное представление решения в виде (3) является удобным при исследовании устойчивости системы (2) с переменной матрицей $P(t)$. В [1, с. 118] доказано, что если все собственные значения $\lambda_i=\lambda_i(A)$ $(i=1,2,...,n)$ предельной матрицы

$$A=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}P(\tau)d\tau$$

расположены в левой полуплоскости, т.е. $\operatorname{Re}\lambda_i(A)\leq 0$ $(i=1,2,...,n)$ то линейная система (2) асимптотически устойчива при $t\to\infty$.

Отметим, что система Коши дифференциальных уравнений [2, с. 39; 3, с. 396]

$$t\frac{dx}{dt}=Px, \qquad (4)$$

где P - постоянная матрица, имеет фундаментальное матричное решение

$$x=\mathrm{e}^{P\ln t}=t^P.$$

Известно, что функция t^P может быть представлена в виде

$$t^P=\sum_{k=1}^{s}\left(z_{k1}+z_{k2}+...+z_{km_k}[\ln t]^{m_k}\right)t^{\lambda_k},$$

где $\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdot...\cdot(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$ ($\lambda_i\neq\lambda_k$ при $i\neq k,\ i,\ k=1,2,...,s$) - минимальный многочлен матрицы P, а z_{kj} $(k=1,\ 2,...,\ m_s;\ j=1,\ 2,...,\ s)$ - линейно независимые постоянные матрицы, являющиеся многочленами P.

Из жордановой структуры матрицы следует, что если все собственные значения матрицы P удовлетворяет соотношению $\operatorname{Re}\lambda_i=\lambda_i(P)<0$, то линейная система (4) асимптотически устойчива при $t\to\infty$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений типа Коши

$$t\frac{dx}{dt}=P(t)x, \qquad (5)$$

где $P(t)$ голоморфная матрица при $|t|\geq|t_0|$ и удовлетворяет условию типа Лаппо-Данилевского

$$P(t)\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau=\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau\cdot P(t). \qquad (6)$$

Будем изучать структуру решений системы (5), при этом будем следовать методику предложенной в [1].

Покажем, что общее решение (5) можно представить в виде $x(t)=\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau}\cdot x_0$. (7)

Покажем, что

$$\Omega(t)=\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau}$$

является матрицантом системы (5).

Действительно, учитывая, что

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau=\frac{P(t)}{t}$$

вычислим производную

$$\frac{d}{dt}\Omega(t)=\left(\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau}\right)'=\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau}\cdot\frac{P(t)}{t}=\frac{P(t)}{t}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau}=\frac{P(t)}{t}\Omega(t). \qquad (8)$$

Кроме, того $\Omega(t_0)=E$. Отметим, при выводе формулы (8) учтено коммутативность матриц, определяемая соотношением (6). Таким образом, общее решение системы (1), определяется формулой (7).

Далее, предположим, что для любой пары $(t_0,t)\in S, S=\{(t,s)\in C:|t|>|s|\geq t_0\}$ выполнено условие (1) и существует предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\ln|t|}\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau=A.$$

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть все собственные значения $\lambda_i=\lambda_i(A)$ $(i=1,2,...,n)$ предельной матрицы A расположены в левой полуплоскости, т.е.

$$\operatorname{Re}\lambda_i(A)<0\ (i=1,2,...,n)$$

то линейная система (5) асимптотически устойчива при $t\to\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: а) Из условия (6) в множестве S получаем

$$P(t)\cdot\int_{s}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau=\int_{s}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau\cdot P(t). \qquad (9)$$

Отсюда дифференцируя (9) по переменной s имеем

$$P(t)\cdot\left[-\frac{P(s)}{s}\right]=\left[-\frac{P(s)}{s}\right]\cdot P(t),$$

или $P(t)\cdot P(s)=P(s)\cdot P(t)$.

Далее имеем

$$\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau_1)}{\tau_1}d\tau_1\cdot\frac{1}{\ln|s|}\int_{t_0}^{s}\frac{P(\tau_2)}{\tau_2}d\tau_2=\frac{1}{\ln|s|}\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau_1}{\tau_1}\int_{t_0}^{s}\frac{P(\tau_1)\cdot P(\tau_2)}{\tau_2}d\tau_2=$$

$$=\frac{1}{\ln|s|}\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau_1}{\tau_1}\int_{t_0}^{s}\frac{P(\tau_2)\cdot P(\tau_1)}{\tau_2}d\tau_2=\frac{1}{\ln|s|}\int_{t_0}^{s}\frac{P(\tau_2)}{\tau_2}\cdot d\tau_2\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau_1)}{\tau_1}d\tau_1.$$

Если перейти в последнем равенстве к пределу при $s\to\infty$ будем иметь

$$\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau_1)}{\tau_1}d\tau_1\cdot A=A\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau_1)}{\tau_1}d\tau_1\,, \tag{10}$$

т.е. предельная матрица A является перестановочным с интегралом $\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau$.

б) Предположим, что $\frac{1}{\ln|t|}\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau=A+B(t)$ и $B(t)\to 0$, при $t\to\infty$.

Убедимся в том, что матрица A и $B(t)$ перестановочны. В силу (9) имеем

$$A\cdot B(t)=A\cdot\left[\frac{1}{\ln|t|}\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau-A\right]=\frac{1}{\ln|t|}\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau\cdot A-A^2=B(t)\cdot A\,.$$

На основании формулы (7) находим, что всякое решение $x(t)$ системы (5) имеет вид

$$x(t)=\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau}\cdot x(t_0)=\mathrm{e}^{\ln|t|\cdot A+\ln|t|\cdot B(t)}\cdot x(t_0)\,.$$

Учитывая перестановочность матриц A и $B(t)$ отсюда получаем

$$x(t)=\mathrm{e}^{\ln|t|\cdot A}\cdot\mathrm{e}^{\ln|t|\cdot B(t)}\cdot x(t_0)\,. \tag{11}$$

Допустим, что

$$\min_{1\le i\le n}\operatorname{Re}\lambda_i(A)=\alpha<0$$

и $\varepsilon>0$ таково, что $\alpha+2\varepsilon<0$.

Выберем T столь большим, что справедлива

$$\|B(t)\|<\varepsilon \text{ для } t\ge T>0\,.$$

Из (11) оценивая, имеем

$$\|x(t)\|\le\left\|\mathrm{e}^{\ln|t|\cdot A}\right\|\cdot\left\|\mathrm{e}^{\ln|t|\cdot B(t)}\right\|\cdot\|x(t_0)\|\le N\cdot\mathrm{e}^{(\alpha+\varepsilon)\ln|t|}\cdot\mathrm{e}^{\varepsilon\ln|t|}\cdot\|x(t_0)\|\le$$

$$\le N\cdot\|x(t_0)\|\cdot\mathrm{e}^{(\alpha+2\varepsilon)\ln|t|}$$

при $|t|\ge T$.

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0\,,$$

а это значит, что линейная дифференциальная система (5) асимптотически устойчива при $t \to \infty$.

Иллюстративный пример. Рассмотрим систему уравнений (5), где

$$P(t) = \begin{pmatrix} -2+\frac{1}{t} & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & -2+\frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t} \frac{P(\tau)}{\tau} d\tau = \begin{pmatrix} -2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} & -\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} \\ -\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} & -2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} \end{pmatrix}.$$

Проверим условие (6):

$$P(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{P(\tau)}{\tau} d\tau = \begin{pmatrix} -2+\frac{1}{t} & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & -2+\frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} & -\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} \\ -\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} & -2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(-2+\frac{1}{t}\right)\left[-2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0}\right] - \frac{1}{t^2} & \left(-2+\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0}\right) + \frac{1}{t}\left[-2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0}\right] \\ \frac{1}{t}\left[-2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0}\right] - \frac{1}{t}\left(-2+\frac{1}{t}\right) & -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t_0 t} + \left(-2+\frac{1}{t}\right)\left[-2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0}\right] \end{pmatrix},$$

а условие

$$\int_{t_0}^{t} \frac{P(\tau)}{\tau} d\tau \cdot P(t) = \begin{pmatrix} -2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} & -\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} \\ -\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} & -2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2+\frac{1}{t} & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & -2+\frac{1}{t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left[-2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0}\right]\left(-2+\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t^2} & \left[-2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{tt_0}\right]\frac{1}{t} + \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0}\right)\left(-2+\frac{1}{t}\right) \\ \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0}\right)\left(-2+\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t}\left[-2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0}\right] & -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{tt_0} + \left[-2(\ln t - \ln t_0) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0}\right]\left(-2+\frac{1}{t}\right) \end{pmatrix}.$$

Из этих соотношений видно, что выполняется условие типа Лаппо-Данилевского (6).

Проверим условие б) теоремы, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\ln|t|} \int_{t_0}^{t} \frac{P(\tau)}{\tau} d\tau = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\ln|t|} \begin{pmatrix} 2\ln t_0 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} & -\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} \\ -\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} & 2\ln t_0 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} \end{pmatrix}.$$

В нашем случае $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $B(t)=\dfrac{1}{\ln|t|}\begin{pmatrix}2\ln t_0-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t_0} & -\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t_0}\\ -\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t_0} & 2\ln t_0-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t_0}\end{pmatrix}$. Очевидно, что $B(t)\to 0$, при $t\to\infty$ и $\operatorname{Re}\lambda_i(A)=-2<0,\ i=1,2$. Тогда в силу теоремы все решения уравнения (5) асимптотически устойчивы.

Литература:

1. Демидович Б.П. Лекции по математической устойчивости. - М.: Наука, 1967. - 472 с.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: «Мир», 1968. - С.464.
3. Гантмахер. Теория матриц. - М.: Наука, 1988. - 552 с.
4. Байзаков А.Б., Шаршенбеков М.М. Обобщенные показатели интегро-дифференциальных уравнений // Вестник ОшГУ. - Ош, 2013. - Вып. 1. - С.100-105.
5. Байзаков А.Б. Об асимптотическом поведении решений одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // Поиск, серия естест.-техн. наук, №1. - Алматы, 2009. - С. 205-209.
6. Байзаков А.Б. Математические методы в естественных науках. Дифференциальные уравнения в приложениях. Курс лекций. - Бишкек. КНУ им. Ж.Баласагына. - 2004. - 76 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.