Одинаев Р.Н.

УБАКЫТ-ЖАШ КУРАК ТҮЗҮМҮН ЖАНА МЕЙКИНДИКТЕГИ ЖАЙГАШУУСУН КӨҢҮЛГӨ АЛУУ МЕНЕН ЭРКИН ТРОФИКАЛЫК ФУНКЦИЯЛАРЫ БАР ӨСҮМДҮКТӨРДҮ КОРГОО ПРОЦЕССИН КОМПЬЮТЕРДИК МОДЕЛДӨӨ

Одинаев Р.Н.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАЩИТЫ РАСТЕНИЙ С УЧЕТОМ ВРЕМЕННО-ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ И ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ТРОФИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

R.N. Odinaev

COMPUTER MODELING OF THE PROCESS OF PLANT PROTECTION TAKING INTO ACCOUNT THE TEMPORAL-AGE STRUCTURE AND SPATIAL DISTRIBUTION WITH ARBITRARY TROPHIC FUNCTIONS

УДК: 519.85-519-7

Бул иште убакыт-жаш курак түзүмүн жана мейкиндиктеги жайгашуусун көңүлгө алуу менен эркин трофикалык функциялары бар өсүмдүктөрдү коргоо процессин компьютердик моделдөө каралды. Өсүмдүктөрдү коргоо процессинин бар болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары табылды.

Негизги сөздөр: *компьютердик моделдөө, математикалык модель, агроценоз, трофикалык функция, зыяндуу курт-кумурскалар, пайдалуу курт-кумурскалар.*

В данной работе рассматривается компьютерное моделирование процесса защиты растений с учетом возрастной структуры и пространственного распределения с произвольными трофическими функциями. Найдены необходимые и достаточные условия существования процесса защиты растений.

Ключевые слова: *компьютерное моделирование, математическая модель, агроценоз, трофическая функция, вредные насекомые, полезные насекомые.*

In this paper, a computer simulation of the plant protection process is considered taking into account the age structure and spatial distribution with arbitrary trophic functions. The necessary and sufficient conditions for the existence of the plant protection process have been found.

Key words: *computer modeling, mathematical model, agrocenosis, plant protection, an arbitrary trophic function, harmful insects, useful insects.*

Рассмотрим математическую модель агроценоза, имеющую три трофических уровня типа «растение» - «вредные насекомые» - «полезные насекомые» с учетом временно-возрастной структуры и пространственного распределения в следующем виде [1-9]:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 N_0 N_1, \\ \dfrac{dN_1}{dt} = N_1\left(k_0\alpha_0 N_0 - \dfrac{V_1(N_1)}{N_1}\widetilde{N}_2 - m_1\right) \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial t} + \dfrac{\partial N_2}{\partial a} + \dfrac{\partial N_2}{\partial x} = N_2\left(k_1 V_1(N_1) - \dfrac{V_2(N_2)}{N_2}\widetilde{N}_3 - m_2\right) \\ \dfrac{\partial N_3}{\partial t} + \dfrac{\partial N_3}{\partial a} + \dfrac{\partial N_3}{\partial x} = N_3(k_2 V_2(N_2) - \varepsilon N_3 - m_3), \end{cases} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$N_i(x,a,0)=N_i^0(x,a), \quad x\in\overline{G}, \ 0\le a<\infty, \quad i=2,3$$

$$N_2(x,0,t)=\int_0^\infty B_2(\xi,t,N_1)N_2(x,\xi,t)dt,$$

$$N_3(x,0,t)=\int_0^\infty B_3(\xi,t,\widetilde{N}_2)N_3(x,\xi,t)dt, \quad 0\le t\le\tau.$$

$$N_i\big|_s=0, \qquad i=2,3.$$

где Q - скорость внешнего ресурса, $N_0=N_0(t)-$масса внешнего ресурса в момент времени t, $N_1=N_1(t)-$ биомасса растений сельхозкультуры в момент времени t, $N_i=N_1(x,a,t)-$ численности вредных ($i=2$) и полезных ($i=3$) насекомых возраста a в момент времени t и в точке x, x - пространственная координата, $t\in[0,\tau], \tau-const<\infty, a\in[0,\infty)$.

$B_2(\cdot)$, $B_3(\cdot)$ - коэффициент рождаемости насекомых.

m_i, $k_i, i=0,1,2; \alpha_i$, ε, - биологические параметры,

$V_i(\cdot)-i=1,2$ $-$ произвольная трофическая функция со свойствами:

$$\frac{dV(N)}{dN}>0, \quad \frac{d^2V(N)}{dN^2}\le 0.$$

Обозначим $M_i(a,t)=\max_x N_i(x,a,t), i=2,3. \quad 0\le a<\infty, \ 0\le t\le\tau.$

и $B_2(\cdot)=b_2(a)N_1$, $B_3(\cdot)=b_3(a)N_2$.

Тогда выше сформулированная задача, т.е. (1), принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dN_0}{dt}=Q-\alpha_0N_0N_1, \\ \frac{dN_1}{dt}=N_1(k_0\alpha_0N_0-\frac{V_1(N_1)}{N_1}\widetilde{N}_2-m_1), \ , \ N_i(0)=N_i^0, i=0,1. \\ \frac{\partial M_2}{\partial t}+\frac{\partial M_2}{\partial a}=M_2(k_1V_1(N_1)-\frac{V_2(N_2)}{N_2}\widetilde{N}_3-m_2), \\ \frac{\partial M_3}{\partial t}+\frac{\partial M_3}{\partial a}=M_3(k_2V_2(N_2)-\varepsilon N_3-m_3), \quad M_i|_{t=0}=M_i^0(a), i=2,3. \\ M_2(0,t)=\int_0^\infty b_2(\xi)N_1(t)\,M_2(\xi,t)d\xi \\ M_3(0,t)=\int_0^\infty b_3(\xi)N_2(t)\,M_3(\xi,t)d\xi \end{cases} \tag{2}$$

Введем обозначения

$N_1^\tau=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau N_1(t)dt$ и $\widetilde{N}_i^\tau=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\widetilde{N}_i(t)dt$ $\quad i=2,3, \ \tau>0-$ средниебиомассы (или средние численности) за время τ.

Рассмотрим $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\widetilde{N}_2(t)dt\le N_2^P$, $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\widetilde{N}_3(t)dt\ge N_3^P$ и находим N_2^p, N_3^p такие, что выполняется условие

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau N_1(t)dt\ge N_1^P, \qquad N_1^P\in[N_1^{min},N_1^{max}],$$

где N_1^p- величина планируемого урожая , N_2^p- пороги вредоносности вредителей, N_3^p- уровни эффективности полезных насекомых.

Теперь сформулируем необходимые и достаточные условия получения планируемого урожая в терминах модельной биосистемы (3).

Теорема. Пусть $V_i(.) \geq 0$, $\frac{dV_i}{dN} > 0$, $\frac{d^2V_i}{dN^2} \leq 0$,

$$0 < \min_t \frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)} = \overline{\alpha}_1 < \infty, \quad 0 < \max_a \frac{V_2(N_2(a,t))}{N_2(a,t)} = \overline{\alpha}_2 < \infty \ ,$$

$\overline{\alpha}_1 \cdot \overline{\alpha}_2 = \text{const}, \quad i = 1,2.$

Тогда для того, чтобы имело место условие

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau N_1(t)dt \geq N_1^P, N_1^p \in \left[N_1^{\min}, N_1^{\max}\right]$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\begin{cases} N_0(t) \leq \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^P}, \ \ 0 \leq t \leq \tau, \\ \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^\tau \widetilde{N}_2(t)dt \leq N_2^P, \\ \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^\tau \widetilde{N}_3(t)dt \geq N_3^P. \end{cases} \qquad (6)$$

где N_2^P, N_3^P определяются по формулам:

$$N_2^P = \frac{k_0 Q}{\overline{\alpha}_1 N_1^P} - \frac{m_1}{\overline{\alpha}_1} - \frac{1}{\overline{\alpha}_1 \tau} ln \frac{N_1(\tau)}{N_1(0)},$$

$$N_3^P = \frac{k_2 \overline{\alpha}_1}{\overline{\alpha}_2} N_1^P - \frac{m_2}{\overline{\alpha}_2} - \frac{1}{\overline{\alpha}_2 \tau} \max_x ln \frac{N_2(x,a,\tau)}{N_2(a,0)}.$$

Пусть выполняется условие $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau N_1(t)dt \geq N_1^P, N_1^p \in \left[N_1^{min}, N_1^{max}\right]$

Покажем справедливость (6). В силу 1-го уравнения системы (3)

$$\frac{dN_0}{dt} = Q + F_0(N_0, N_1),$$

$$N_0(t) \leq N_0 \exp\left(-\alpha_0 \int_0^t N_1(\tau)d\tau\right) + Q\int_0^t \exp\left(-\alpha_0 \int_\tau^t N_1(\xi)d\xi\right)d\tau \leq \left[N_0(0) - \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right]\exp\left(-\alpha_0 N_1^p t\right) + \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}.$$

Следовательно, $N_0(t) \leq \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^p}$, $0 \leq t \leq t_k$ $\quad \left(N_0(0) = \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right)$

Из 2-го уравнения (3) получим [4,6]:

$\frac{dN_1}{dt} = k_0\alpha_0 N_0 N_1 - V_1(N_1)\widetilde{N}_2 - m_1 N_1$, отсюда

$\frac{d}{dt} lnN_1 = k_0\alpha_0 N_0 - \frac{V_1(N_1)}{N_1}\widetilde{N}_2 - m_1$, так как

$\frac{V_1(N_1)}{N_1}\widetilde{N}_2 = k_0\alpha_0 N_0 - m_1 - \frac{d}{dt} lnN_1$ и

$\frac{V_1(N_1)}{N_1}\widetilde{N}_2 = \frac{k_0 Q}{N_1^P} - m_1 - \frac{d}{dt} lnN_1$ то проинтегрируя по t от 0 до τ, получим:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)}\tilde{N}_2(t)\,dt = \frac{k_0Q}{N_1^P} - m_1 - \frac{1}{\tau}ln\frac{N_1(\tau)}{N_1(0)},$$

т.е. $0<\min_{0\le t\le\tau}\frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)}\tilde{N}_2 \le \frac{k_0Q}{N_1^P} - m_1 - \frac{1}{\tau}ln\frac{N_1(\tau)}{N_1(0)},$

так как $0 < \min_{0\le t\le\tau}\frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)} = \bar{\alpha}_1 < \infty$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\tilde{N}_2(t)\,dt\bar{\alpha}_1 \le \frac{k_0Q}{N_1^P} - m_1 - \frac{1}{\tau}ln\frac{N_1(\tau)}{N_1(0)},$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\tilde{N}_2(t)\,dt \le \frac{k_0Q}{\bar{\alpha}_1N_1^P} - \frac{m_1}{\bar{\alpha}_1} - \frac{1}{\bar{\alpha}_1\tau}ln\frac{N_1(\tau)}{N_1(0)} = N_2^p$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\tilde{N}_2\,(t)dt \le N_2^P.$$

Для доказательства 3-го неравенства (6) рассмотрим третье уравнение (3)

$$\frac{\partial M_2}{\partial t} + \frac{\partial M_2}{\partial a} = M_2(k_1V_1(N_1) - \frac{V_2(N_2)}{N_2}\tilde{N}_3 - m_2),$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a})lnM_2 = k_1V_1(N_1) - \frac{V_2(N_2)}{N_2}\tilde{N}_3 - m_2$$

Отсюда $\frac{V_2(N_2)}{N_2}\tilde{N}_3 \ge k_1V_1(N_1) - m_2 - (\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a})lnM_2$

Введем замену переменных

$$a=t+\xi,\ \varphi(t,\xi)=M_2(t+\xi,t)$$

и учитывая условие $\frac{da}{dt}=1,$ заключаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial M_2}{\partial t} + \frac{\partial M_2}{\partial a}.$$

Тогда имеем

$$\frac{V_2(N_2)}{N_2}\tilde{N}_3 \ge k_1V_1(N_1) - m_2 - \frac{\partial}{\partial t}ln\varphi$$

и после интегрирования по t от 0 до τ получим

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\frac{V_2(N_2)}{N_2}\tilde{N}_3\,dt = k_1\bar{\alpha}_1N_1^P - m_2 - \frac{1}{\tau}ln\frac{M_2(a,\tau)}{M_2(a,0)},$$

$$0<\max_a\frac{V_2(N_2(a,t))}{N_2(a,t)}\tilde{N}_3 \ge \frac{k_0Q}{N_1^P} - m_1 - \frac{1}{\tau}ln\frac{M_2(a,\tau)}{M_2(a,0)}$$

Так как

$0 < \max_a\frac{V_2(N_2(a,t))}{N_2(a,t)} = \bar{\alpha}_2 < \infty,$ то

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \widetilde{N}_3(t)\,dt \geq \frac{\mathrm{k}_1\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2} N_1^P - \frac{\mathrm{m}_2}{\bar{\alpha}_2} - \frac{1}{\tau\bar{\alpha}_2}\max_x ln\frac{N_2(x,a,\tau)}{N_2(a,0)} = N_3^p$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \widetilde{N}_3\,(t)dt \geq N_3^P\,.$$

Достаточность. Пусть выполняется (6). Докажем справедливость условия $\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\mathrm{N}_1(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} \geq N_1^P$, $N_1^P \in [N_1^{min}, N_1^{max}]$.

Из первого уравнения (3) находим

$N_0(t) = N_0(0) + Qt - \alpha_0\int_0^{\tau} N_0 N_1(t)dt$, отсюда

$N_0(t) \geq N_0(0) + Qt - \frac{Q}{N_1^P}\int_0^{\tau} N_1(t)dt$ и, следовательно:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} N_1(t) - N_1^p \geq \frac{\left[N_0(0) - \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right]N_1^p}{Qt_k}, \quad \left(N_0(0) = \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right)$$

и получим

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} N_1(t)dt \geq N_1^P.$$

В силу того, что N_2^P, N_3^P неотрицательны, тогда

$$\frac{m_2}{k_1\bar{\alpha}_1} + \frac{1}{\bar{\alpha}_2\tau}\max_x ln\frac{N_2(x,a,\tau)}{N_2(a,0)} \leq N_1^P \leq \frac{k_0 Q}{m_1\dfrac{\bar{\alpha}_1}{\tau}ln\dfrac{N_1(\tau)}{N_1(0)}}.$$

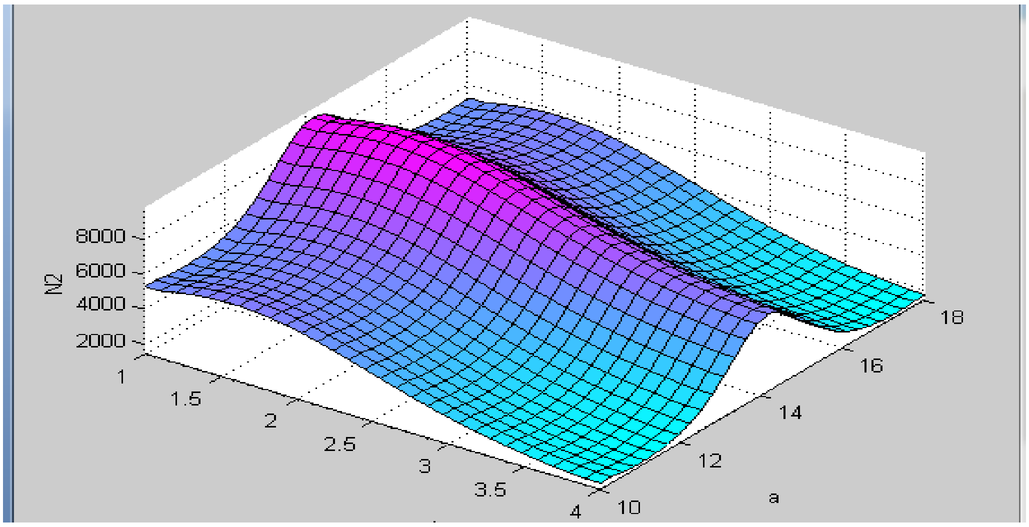

Рис. 1. Фазовый портрет численности вредных насекомых N_2.

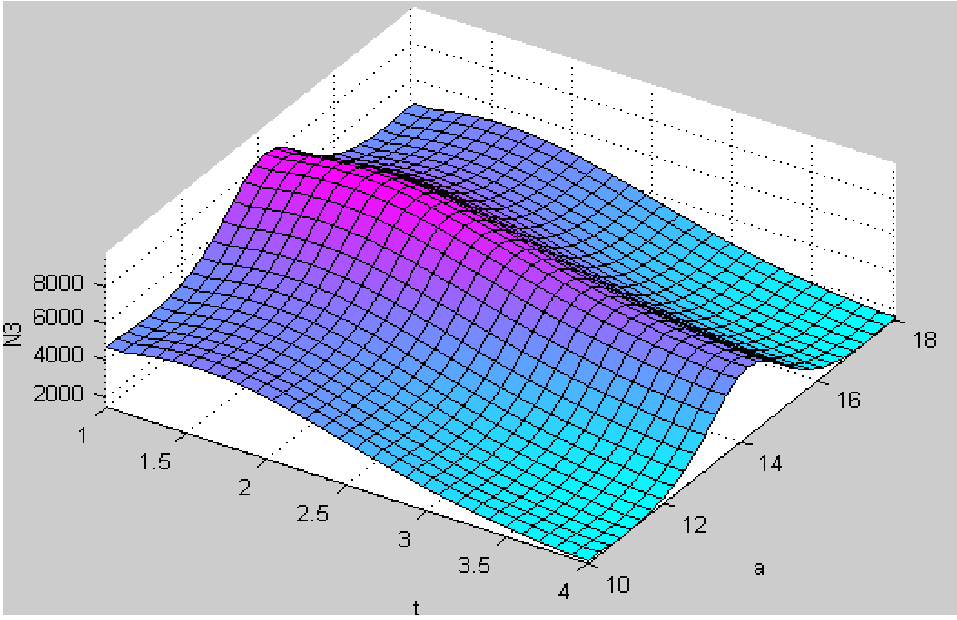

Рис. 2. Фазовый портрет численности полезных насекомых N_3.

Литература:

1. Одинаев Р.Н., Косимов Ш.Н. Исследование точечной математической модели задачи защиты растений в нестационарном случае. // Вестник Таджикского национального университета, №1/3 (134). - Душанбе, 2014. - С. 6-10.
2. Одинаев Р.Н., Косимов Ш.Н. Определение критических значений задачи защиты растений // Материалы Республиканской научной-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной «25-летию государственной Независимости Республики Таджикистан». - Душанбе, 2016. - С. 47-48.
3. Одинаев Р.Н. Исследование математической модели задачи защиты растений в стационарном случае // Вестник Таджикского национального университета, №1/3 (110). - Душанбе, 2013. - С. 7-11.
4. Одинаев Р.Н. Необходимое и достаточное условие существования решения задачи защиты растений. - Доклады АН РТ, том 58, №10. - Душанбе, 2015. - С. 879-886.
5. Одинаев Р.Н. Об одной нелинейной математической модели защиты растений с учетом возрастной структуры // Вестник Таджикского национального университета №1/2 (196). - Душанбе, 2016. - С. 13-17.
6. Одинаев Р.Н. Об одном необходимом и достаточном условии существования решения задачи защиты растений // Евразийское Научное Объединение. 2017. - Т.1. - №12 (34). - С. 20-25.
7. Свирижев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. // М.: «Наука», 1978. - 352 с.
8. Одинаев Р.Н. Задача защити растений для точечных моделей и при произвольных трофических функциях. // Вестник Таджикского национального университета. №1/3(85). - Душанбе, 2012. - С. 25-30.
9. Юнусов М.К. Математические модели борьбы с вредителями агроценозов. - Душанбе: «Дониш», 1991. - 146с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Сатторов С.С.