МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Какишов К., Какишов Ж.К., Садыкова Б.А.

ИМПУЛЬСТУН ТААСИРИ АСТЫНДАГЫ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС СКАЛЯРДЫК СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮККӨН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН БАШТАПКЫ МАСЕЛЕНИН АСИМПТОТИКАЛЫК ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Какишов К., Какишов Ж.К., Садыкова Б.А.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

K. Kakishov, Zh.K. Kakishov, B.A. Sadykova

ASYMPTOTIC SOLVING OF BOUNDARY EQUATION FOR SINGULAR PERTURBED NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE PRESSURE

УДК: 517.9

Импульстун таасири астындагы, сызыктуу эмес скалярдык сингулярдык дүүлүккөн дифференциалдык теңдеме үчүн асимптотикалык үзгүлтүктүү чыгарылышы түзүлдү. $(0,1]$ кесиндисинде $\varepsilon \to 0$ учурда импулстук, скалярдык сингулярдык-дүүлүккөн дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселенин үзгүлтүктүү чыгарылышынын жалгыздыгынын жетиштүү шарттары алынды.

Негизги сөздөр: *асимптотика, баштапкы маселе, импулстун таасири, Хевисайддын тепкичтүү функциясы, Дирактын импульстук дельта-функциясы, четки катмардын фукнциясы, биринчи түрдөгү үзүлүү, кичине параметр.*

Построены асимптотические формулы для нелинейных скалярных сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Получены достаточные условия существования и единственности разрывного решения начальной задачи для скалярных сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием при $\varepsilon \to 0$ на отрезке $(0,1]$.

Ключевые слова: *асимптотика, начальная задача, импульсное воздействие, ступенчатая функция Хевисайда, импульсная дельта-функция Дирака, функция пограничного слоя, разрыв первого рода, малый параметр.*

Asymptotic formulas for nonlinear singularly perturbed differential equations with impulse control were developed. Have been received enough conditions of existence and singularity of perturbed equations for singular perturbed differential equations with impulse control under $\varepsilon \to 0$ when on the segment $(0,1]$.

Key words: *asymptotic boundary equation, impulse, Hevisayd's step function, impulse Dirac's delta function, the first kind of gap, a small parameter.*

В данной работе рассматривается особенности, возникающие при нарушении известных условий [1]. В работах [2], [3], [4] исследованы разрывные решения сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений, когда вырожденное уравнение имеет разрывные решения.

Здесь получено асимптотическое представление решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon y'(x,\varepsilon) = f_0(x, y(x,\varepsilon)) + \sum_{k=1}^{n} \theta(p_k) f_k(x, y(x,\varepsilon)) + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} A_k \delta(p_k), \quad (0 \le x \le 1) \tag{1}$$

$$y(0) = b, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon < 1$, b, A_k - заданные постоянные,

$p_k = x - x_k$, $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1$ - некоторые заданные числа,

$\theta(x)$ - функция Хевисайда – «единичная ступенька»,

$\theta(+0)=1$, $\theta(0)=0$, $\theta'(p_k)=\delta(p_k)$ - обобщенная дельта-функция Дирака «единичный импульс», $f_k(x,y)$ - семь раз непрерывно дифференцируемая функция и ее производные ограничены.

$$f_k(x_k,y)=f'_{kx}(x_k,y)=f''_{kx^2}(x_k,y)=f'''_{kx^3}(x_k,y)=f^{IV}_{kx^4}(x_k,y)=0,$$

$M(f^{VI}_{kx^5y}(x,y))\le-\alpha_k H(x),$ где α_k-постоянная, $\alpha_k>0.$ $H(x)=\min\limits_{1\le k\le N}\{|x-x_k|^5, k=\overline{1,N}\}$.

Полагая $\varepsilon=0$ из (1) получаем:

$$f_0(x,\upsilon)+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)f_k(x,\upsilon)=0. \qquad (2_0)$$

Решение нелинейного функционально-алгебраического уравнения ищем в виде:

$$\upsilon(x)=\upsilon_0(x)+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)\upsilon_k(x), \qquad (2_1)$$

где $[\upsilon_0,\upsilon_1,...,\upsilon_N]$ - пока неизвестные функции.

Подставляя (2_1)в (2_0) получаем:

$$f_0(x,\upsilon_0+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)\upsilon_k)+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)f_k(x,\upsilon_0+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)\upsilon_k)=$$
$$=f_0(x,\upsilon_0)+\theta(p_1)(f_0(x,\upsilon_0+\upsilon_1)+f_1(x,\upsilon_0+\upsilon_1)-f_0(x,\upsilon_0))+$$
$$+\theta(p_2)[\sum_{k=0}^{2}f_k(x,\sum_{k=0}^{2}\upsilon_k)-\sum_{k=0}^{1}f_k(x,\sum_{k=0}^{2}\upsilon_k)]+...+$$
$$+\theta(p_N)[\sum_{k=0}^{N}f_k(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k)-\sum_{k=0}^{N-1}f_k(x,\sum_{k=0}^{N-1}\upsilon_k)]=0.$$

Приравнивая коэффициенты при $\theta(p_k)$ получим:

$$f_0(x,\upsilon_0(x))=0 \quad (0\le x\le 1), \qquad (2_2)$$
$$f_0(x,\upsilon_0+\upsilon_1)+f_1(x,\upsilon_0+\upsilon_1)=0 \quad (x_1\le x\le 1), \qquad (2_3)$$

\- -

$$\sum_{k=0}^{N}f_k(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k(x))=0_* \quad (x_N\le x\le 1). \qquad (2_N)$$

Предполагается, что решения $\upsilon_0,\upsilon_1,...,\upsilon_N$ соответственно удовлетворяют уравнениям(2_2),(2_3), ..., (2_N).

Теорема. Пусть 1) вырожденное уравнение (2_2)-(2_N)для (1) (2) имеет устойчивое решение с конечным числом разрывов первого рода

$$\upsilon(x)=\upsilon_0(x)+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)\upsilon_k(x).$$

2) Выполняется тождество $f_k(x_k,y)=f'_{kx}(x_k,y)=f''_{kx}(x_k,y)=f'''_{kx}(x_k,y)=f^{IV}_{kx}(x_k,y)=0$.

3) Функция $f_k(x,y)\in C^7$.

4) $M(f^{VI}_{kx^5y}(x,y))\le-\alpha_k H_k(x),$ $H_k(x)=\min\limits_{1\le k\le N}\{|x-x_k|^5, k=\overline{1,N}\}$ α_k - постоянная $\alpha_k>0$.

Тогда задача Коши (1)-(2) имеет единственное разрывное решение, представимое в виде:

$$y(x,\varepsilon)=\upsilon_0(x)+\prod_0(\tau)+\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0(x,\varepsilon)+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)(\upsilon_k(x)+\prod_k(\tau_k)+\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_k),$$

причем при $\varepsilon\to 0$ - это решение сходится к разрывному решению (2_1) на полусегменте $(0,1]$,

где $\tau_k=\dfrac{|x-x_k|^5(x-x_k)}{6\varepsilon}$, $\tau=\dfrac{x}{\varepsilon}$, $|\prod_0|\le C_0\,e^{-\alpha_0\tau}$, $C_0>0$.

$|\prod_k|\le C_k\,e^{-\alpha_k\tau_k}$ - функция правого внутреннего пограничного слоя, ξ_0,ξ_k равномерно ограничены при $\varepsilon\to 0$.

Основные этапы доказательства.

Подстановкой:

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)\,y_k(x) \tag{3}$$

с начальным условием

$$y_0(0)=b \tag{3_0}$$

уравнение (1) приводится к виду:

$$\varepsilon y_0'+\varepsilon\sum_{k=1}^{N}\delta(p_k)y_k(x_k)+\varepsilon\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k'=f_0(x,y_0+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k)+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)f_k(x,y_0+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k)+\varepsilon\sum_{k=1}^{N}A_k\delta(p_k). \tag{3_1}$$

Приравнивая коэффициенты при $\delta(p_k)$, получим

$$y_k(x_k)=A_k\quad k=\overline{1,N}. \tag{3_2}$$

Уравнение (3_1) приводится к виду:

$$\varepsilon y_0'+\varepsilon\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k'=f_0(x,y_0+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k)+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)f_k(x,y_0+\sum_{k=1}^{N}\theta(p_k)y_k). \tag{3_3}$$

Приравнивая коэффициенты при $\theta(p_k)$, получим следующую цепочку нелинейных дифференциальных уравнений для определения неизвестных дифференциальных уравнений $y_0(x,\varepsilon),y_1(x,\varepsilon),...,y_N(x,\varepsilon)$ на соответствующих отрезках:

$$\varepsilon y_0'=f_0(x,y_0)\ (0\le x\le 1), \tag{3_4}$$

$$y_0(0)=b.$$

$$\varepsilon y_1'=\sum_{k=0}^{1}f_k(x,y_0+y_1)-f_0(x,y_0)\ (x_1\le x\le 1), \tag{3_5}$$

$$y_1(x_1)=A_1.$$

$$\varepsilon y_2'=\sum_{k=0}^{2}f_k(x,\sum_{k=0}^{2}y_k)-\sum_{k=0}^{1}f_k(x,\sum_{k=0}^{1}y_k)\ (x_2\le x\le 1), \tag{3_6}$$

$$y_2(x_2)=A_2.$$

- -

$$\varepsilon y_k' = \sum_{k=0}^{k} f_k(x, \sum_{k=0}^{N} y_k) - \sum_{k=0}^{k} f_k(x, \sum_{k=0}^{N} y_k)\ (x_k \le x \le 1), \qquad (3_k)$$

$$y_N(x_k) = A_k .$$

Будем теперь решать уравнения $(3_4)–(3_k)$.

Доказательство теоремы представим в виде серии лемм.

Лемма 1. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ нелинейное дифференциальное уравнение (3_4) имеет единственное непрерывное решение, представимое в виде:

$$y_0(x,\varepsilon) = \upsilon_0(x) + \prod\nolimits_0(\tau) + \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_0(x,\varepsilon), \qquad (3_8)$$

где $\prod_0(\tau)$ - функция типа пограничного слоя в точке $x = 0$.

$\xi_0(x,\varepsilon)$ - на сегменте $[0,1]$ равномерно ограничено, причем $\varepsilon \to 0$, это решение сходится к соответствующему непрерывному решению вырожденного уравнения (2_2) на полусегменте $(0,1]$.

Доказательство леммы 1. Начальные условия для неизвестных функций (3_8) возьмем в виде:

$$\prod\nolimits_0(0) = b - \upsilon_0(0),\ \xi_0(0,\varepsilon) = 0. \qquad (3_9)$$

Подставив (3_8) в (3_4) получим:

$$\varepsilon \upsilon_0' + \dot{\prod}_0 + \varepsilon \cdot \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_0' = f_0(x, \upsilon_0 + \prod\nolimits_0 + \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_0) = f_0(0, \upsilon_0(0) + \prod\nolimits_0) + [f_0(x, \upsilon_0(x) + \prod\nolimits_0) -$$

$$- f_0(0, \upsilon_0(0) + \prod\nolimits_0)] + [f_0(x, \upsilon_0 + \prod\nolimits_0 + \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_0) - f_0(x, \upsilon_0 + \prod\nolimits_0)].$$

Определим неизвестные функции $[\prod_0(\tau), \xi_0]$ в виде:

$$\dot{\prod}_0 = f_0(0, \upsilon_0(0) + \prod\nolimits_0),\ 0 < \tau < \infty \qquad (4)$$

$$\prod\nolimits_0(0) = b - \upsilon_0(0),$$

$$\varepsilon \xi_0' = g_0(x,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{6}}} [f_0(x, \upsilon_0 + \prod\nolimits_0 + \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_0) - f_0(x, \upsilon_0 + \prod\nolimits_0)],$$

$$\xi(0,\varepsilon) = 0,$$

где

$$g_0(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{\frac{5}{6}} \upsilon_0' + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{6}}} [f_0(x, \upsilon_0(x) + \prod\nolimits_0) - f_0(0, \upsilon_0(0) + \prod\nolimits_0)].$$

Решению нелинейного дифференциального уравнения (4) удовлетворяет неравенство $|\prod_0(\tau)| \le e^{-\alpha_0 \tau} |b - \upsilon_0(0)|$,

где $f_{0y}'(0, \upsilon_0(0)) \le -\alpha_0 = const > 0$,

$$|g_0(x,\varepsilon)| \le C_0 \varepsilon^{\frac{5}{6}} + C_0 \frac{|x|}{\varepsilon^{\frac{1}{6}}} |\prod\nolimits_0| \le C_0 \varepsilon^{\frac{5}{6}} + C_0 \varepsilon^{\frac{5}{6}} \frac{|x|}{\varepsilon} |\prod\nolimits_0| \le C_0 \varepsilon^{\frac{5}{6}},\ C_0 = const > 0.$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (4_0) запишем в виде:

$$\varepsilon\xi_0' = g_0(x,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{6}}}|x-x_1|^5\,[f^{(IV)}_{0x^5}(x,\upsilon_0+\Pi_0+\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0 - f^{(IV)}_{0x^5}(x,\upsilon_0+\Pi_0))] =$$

$$= g_0(x,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{6}}}|x-x_1|^5\,[f^{(VI)}_{0x^5y}(x,\upsilon_0+\Pi_0)\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0 + f^{(VII)}_{0x^5y^2}(x,\upsilon_0+\Pi_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0)\frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\xi_0^{\,2}}{2}] =$$

$$=|x-x_1|^5\, f^{(VI)}_{0x^5y}(x,\upsilon_0)\xi_0 + |x-x_1|^5\,[f^{(VI)}_{0x^5y}(x,\upsilon_0+\Pi_0) - f^{(VI)}_{0x^5y}(x,\upsilon_0)]\xi_0 +$$

$$+|x-x_1|^5\,\varepsilon^{\frac{1}{6}}\, f^{(VII)}_{0x^5y^2}(x,\upsilon_0+\Pi_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0)\frac{\xi_0^{\,2}}{2}.$$

Переходим к интегральному уравнению:

$$\xi_0(x,\varepsilon) = \int_0^x e^{-\alpha_0\int_s^x \frac{|t-x_1|^5}{\varepsilon}dt}\,\frac{1}{\varepsilon}[g_0(s,\varepsilon) + |s-x_1|^5\,\gamma_0(s,\xi_0)]\,ds =$$

$$= \int_0^{x_1} e^{-\frac{\alpha_0}{\varepsilon}\int_s^{x_1}(x_1-t)^5dt}\,\frac{1}{\varepsilon}[g_0(s,\varepsilon)+(x_1-s)^5\gamma_0(s,\xi_0)]\,ds +$$

$$+\int_{x_1}^x e^{-\frac{\alpha_0}{6\varepsilon}[(x-x_1)^6-(s-x_1)^6]}\,\frac{1}{\varepsilon}[g_0(s,\varepsilon)+(s-x_1)^5\gamma_0(s,\xi_0)]\,ds =$$

$$= \int_0^{x_1} e^{-\frac{\alpha_0}{6\varepsilon}(x_1-s)^6}\,\frac{1}{\varepsilon}[g_0(s,\varepsilon)+(x_1-s)^5\gamma_0(s,\xi_0)]\,ds + \int_{x_1}^x e^{-\frac{\alpha_0}{6\varepsilon}[(x-x_1)^6-(s-x_1)^6]}\,\frac{1}{\varepsilon}[g_0(s,\varepsilon)+(s-x_1)^5\gamma_0(s,\xi_0)]\,ds,$$

где $\gamma_0(x,\xi) \equiv [f^{(VI)}_{0x^5y}(x,\upsilon_0+\Pi_0) - f^{(VI)}_{0x^5y}(x,\upsilon_0)]\xi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{6}}\, f^{(VII)}_{0x^5y^2}\,\frac{\xi_0^{\,2}}{2}.$

Имеет место оценка

$$|\gamma_0(x,\xi)| \le C_0|\Pi_0||\xi_0| + C_0\,\varepsilon^{\frac{1}{6}}|\xi_0|^2.$$

Рассмотрим интеграл:

$$\int_0^{x_1} e^{-\frac{\alpha_0}{6\varepsilon}(x_1-s)^6}\,\frac{1}{\varepsilon}g_0(s,\varepsilon)\,ds \le \int_0^{x_1} e^{-\frac{\alpha_0}{6\varepsilon}(x_1-s)^6}\,\frac{1}{\varepsilon}C_0\varepsilon^{\frac{5}{6}}\,ds = C_0\int_0^{x_1} e^{-\frac{\alpha_0}{6\varepsilon}(x_1-s)^6}\,\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{6}}}\,ds,$$

$$\sqrt[6]{\alpha_0}\,\frac{(x_1-s)}{\sqrt[6]{6\varepsilon}} = \nu\ ,\ s=x_1,\ \nu=0\ ,\ s=0,\ \frac{\sqrt[6]{\alpha_0}\,x_1}{\sqrt[6]{6\varepsilon}} = \nu\ ,\ \nu\approx\infty$$

$$-ds = \sqrt[6]{\frac{6\varepsilon}{\alpha_0}}\,d\nu\ ,\ ds = -\sqrt[6]{\frac{6\varepsilon}{\alpha_0}}\,d\nu\ ,$$

$$C_0\int_0^{x_1} e^{-\frac{\alpha_0}{6\varepsilon}(x_1-s)^6}\,\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{6}}}ds \approx C_0\int_0^\infty e^{-\nu^6}\sqrt[6]{\frac{6}{\alpha_0}}\,d\nu = C_0\sqrt[6]{\frac{6}{\alpha_0}}\int_0^\infty e^{-\nu^6}\,d\nu =$$

$$=|\nu = t^{\frac{1}{6}}| = \frac{C_0\sqrt[6]{\frac{6}{\alpha_0}}}{6}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{6}-1}\,dt = C_0\sqrt[6]{\frac{6}{\alpha_0}}\,\frac{1}{6}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{6}-1}\,dt =$$

$$= C_0\sqrt[6]{\frac{1}{\alpha_0\cdot 6^5}}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right).$$

Имеет место оценка

$$|\xi_0| \le C_0 + C_0 |b - \upsilon_0(0)| |\xi_0| + \varepsilon^{\frac{1}{6}} C_0 |\xi_0|^2 ,$$

отсюда

$$|\xi_0| \le 4C_0 ,\ |b - \upsilon_0(0)| \le \frac{1}{2C_0},\ 0 < \varepsilon^{\frac{1}{6}} \le \frac{1}{16C_0^{\ 2}} .$$

Таким образом, лемма доказана.

Лемма 2. Существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что при $\varepsilon < \varepsilon_1$ нелинейное дифференциальное уравнение (3_5) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$y_1(x,\varepsilon) = \upsilon_1(x) + \Pi_1(\tau_1) + \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_1(x,\varepsilon) ,\ \tau_1 = \frac{(x - x_1)^5 (x - x_1)}{6\varepsilon} \tag{4}$$

где $\Pi_1(\tau_1)$ - функция типа пограничного слоя в точке $x = x_1$,

$\xi_1(x,\varepsilon)$ - на сегменте $[x_1, 1]$ равномерно ограничено, причем $\varepsilon \to 0$. Это решение сходится к соответствующему непрерывному решению вырожденного уравнения (2_3) на полусегменте $(x_1, 1]$.

Доказательство леммы 2.

В уравнение (3_5) сделаем подстановку вида (4) со следующими начальными условиями:

$$\Pi_1(0) = A_1 - \upsilon_1(x_1),\ \xi_1(x_1,\varepsilon) = 0, \tag{4_0}$$

где Π_1, ξ_1 - пока неизвестные функции.

Уравнение (3_5) приводится к виду

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \upsilon_1' + \dot{\Pi}_1 |x - x_1|^5 + \varepsilon \cdot \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_1' = \sum_{k=0}^{1} [f_{kx^5}^{(V)}(x, \upsilon_0 + \Pi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_0 + \upsilon_1 + \Pi_1(\tau_1) + \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_1)] |x - x_1|^5 - \\
&- f_{0x^5}^{(V)}(x, \upsilon_0 + \Pi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_0) |x - x_1|^5 \approx \sum_{k=0}^{1} [f_{kx^5}^{(V)}(x, \upsilon_0 + \upsilon_1 + \Pi_1 + \varepsilon^{\frac{1}{6}} (\xi_0 + \xi_1)] |x - x_1|^5 - \\
&- f_{0x^5}^{(V)}(x, \upsilon_0 + \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_0) |x - x_1|^5 \approx |x - x_1|^5 \sum_{k=0}^{1} [f_{kx^5}^{(V)}(x_1, \upsilon_0(x_1) + \upsilon_1(x_1) + \Pi_1) + \\
&+ |x - x_1|^5 \sum_{k=0}^{1} \{ [f_{kx^5}^{(V)}(x, \upsilon_0 + \upsilon_1 + \Pi_1) - f_{kx^5}^{(V)}(x_1, \upsilon_0(x_1) + \upsilon_1(x_1) + \Pi_1) + \\
&+ [f_{kx^5}^{(V)}(x, \upsilon_0 + \upsilon_1 + \Pi_1 + \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_0) - f_{kx^5}^{(V)}(x, \upsilon_0 + \upsilon_1 + \Pi_1)] + \\
&+ [f_{kx^5}^{(V)}(x, \upsilon_0 + \upsilon_1 + \Pi_1 + \varepsilon^{\frac{1}{6}} (\xi_0 + \xi_1)) - f_{kx^5}^{(V)}(x, \upsilon_0 + \upsilon_1 + \Pi_1 + \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_0)] \} - \\
&- f_{0x^5 y}^{(VI)}(x, \upsilon_0 + \theta_0 \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_0) |x - x_1|^5 \ \varepsilon^{\frac{1}{6}} \xi_0 .
\end{aligned}$$

Уравнения для Π_1 и ξ_1 возьмем в виде:

$$\dot{\Pi}_1(\tau_1) = \sum_{k=0}^{1} f_{kx^5}^{(V)}(x_1, \upsilon_0(x_1) + \upsilon_1(x_1) + \Pi_1) \tag{4_1}$$

с начальным условием

$$\Pi_1(0) = A_1 - \upsilon_1(x_1), \tag{4_2}$$

$$\varepsilon\xi_1'(x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{6}}}|x-x_1|^5\sum_{k=0}^{1}(f_{kx^5}^{(V)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{6}}(\xi_0+\xi_1))- \tag{4_3}$$

$$-f_{kx^5}^{(V)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0))+g_1(x,\varepsilon),$$

$$\xi_1(x_1,\varepsilon)=0, \tag{4_4}$$

где

$$g_1(x,\varepsilon)=-\upsilon_1'\varepsilon^{\frac{5}{6}}-f_{0x^5y}^{(VI)}(x,\upsilon_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0)|x-x_1|^5\xi_0+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{6}}}|x-x_1|^5\sum_{k=0}^{1}\Big[(f_{kx^5}^{(V)}(x,\upsilon_0(x)+\upsilon_1(x)+\Pi_1)-f_{kx^5}^{(V)}(x_1,\upsilon_0(x_1)+$$

$$+\upsilon_1(x_1)+\Pi_1))+(f_{kx^5}^{(V)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0)-f_{kx^5}^{(V)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1))].$$

Решение нелинейного дифференциального уравнения (4_1)-(4_2) удовлетворяет оценке:

$$|\Pi_1|\le|A_1-\upsilon_1(x_1)|e^{-\alpha_1\tau_1}, \tag{4_5}$$

где

$$\sum_{k=0}^{1}f_{kx^5y}^{(VI)}(x_1,\upsilon_0(x_1)+\upsilon_1(x_1))\le-\alpha_1=const>0.$$

Имеет место оценка:

$$|g_1(x,\varepsilon)|\le C_1\varepsilon^{\frac{5}{6}}+C_1|x-x_1|^5,\quad C_1=const>0.$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (4_3) запишется в виде

$$\varepsilon\xi_1'=|x-x_1|^5\sum_{k=0}^{1}[(f_{kx^5y}^{(VI)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0)\xi_1+$$

$$+f_{kx^5y^2}^{(VII)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_1)\frac{\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_1^2}{2}]+g_1(x,\varepsilon)= \tag{4_6}$$

$$=|x-x_1|^5\sum_{k=0}^{1}f_{kx^5y}^{(VI)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1)\xi_1+|x-x_1|^5\sum_{k=0}^{1}\{[f_{kx^5y}^{(VI)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0)-$$

$$-f_{kx^5y}^{(VI)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1))]\xi_1+\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_1^2f_{kx^5y^2}^{(VII)}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_1)\}+g_1(x,\varepsilon).$$

Переходим к интегральному уравнению

$$\xi_1(x,\varepsilon)=\int_{x_1}^{x}e^{-\frac{\alpha_1}{6\varepsilon}[(x-x_1)^6-(s-x_1)^6]}\frac{1}{\varepsilon}[g_1(s,\varepsilon)+\gamma_1(s,\xi_1,\varepsilon)]ds, \tag{4_7}$$

где

$$|\gamma_1(x,\xi_1,\varepsilon)|\le C_1|x-x_1|^5[|\Pi_1||\xi_1|+\varepsilon^{\frac{1}{6}}|\xi_1|^2+\varepsilon^{\frac{1}{6}}|\xi_1|].$$

Имеет место оценка

$$|\xi_1|\le C_1+C_1|A_1-\upsilon_1(x_1)||\xi_1|+\varepsilon^{\frac{1}{6}}(|\xi_1|^2+|\xi_1|)C_1.$$

Отсюда получим:

$$|\xi_1| \le 4C_1 = const \quad x_1 \le x \le 1.$$

$$|A_1 - \upsilon_1(x_1)| \le \frac{1}{2C_1}, \quad 0 < \varepsilon^{\frac{1}{6}} < \frac{1}{4C_1(1+4C_1)}, \quad C_1 = const > 0.$$

Таким образом, лемма доказана.

Лемма 3. Существует такое $\varepsilon_k > 0$, что при $\varepsilon < \varepsilon_k$ нелинейные дифференциальные уравнения $(3_6),...,(3_k)$ имеют решение вида:

$$y_2(x) = \upsilon_2(x) + \Pi_2(\tau_2) + \varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_2(x,\varepsilon), \quad (x_2 \le x \le 1), \tag{4$_7$}$$

……………………………………………………………

$$y_N(x) = \upsilon_N(x) + \Pi_N(\tau_N) + \varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_N(x,\varepsilon), \quad (x_N \le x \le 1), \tag{4$_8$}$$

где $\Pi_2(\tau_2)$, $\Pi_N(\tau_N)$ - функции типа пограничного слоя, $|\xi_k|$ $[x_k \le x \le 1]$ равномерно ограничены при $\varepsilon \to 0, \quad k = \overline{1,N}.$

Решение нелинейных дифференциальных уравнений (3_k) с неизвестными Π_k, ξ_k будем искать в виде (4_k) с начальными условиями:

$$\Pi_k(0) = A_k - \upsilon_k(x_k), \quad \xi_k(x_k,\varepsilon) = 0. \tag{5}$$

Подставим (4_8) в уравнение (3_7) получим:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\upsilon_k' + \dot{\Pi}_k |x - x_k|^5 + \varepsilon\cdot\varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_k' = \sum_{i=0}^{k}[(f_i(x,\upsilon_0 + \Pi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0 + \sum_{i=1}^{k}(\upsilon_i + \\ &+ \Pi_i + \varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_i)] - \sum_{i=0}^{k-1} f_i(x,\upsilon_0 + \Pi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_0 + \sum_{i=1}^{k-1}(\upsilon_i + \Pi_i + \varepsilon^{\frac{1}{6}}\xi_i) \approx \\ &\approx |x - x_k|^5 \sum_{i=0}^{k} f_{ix^5}^{(V)}(x,\upsilon_0 + \sum_{i=1}^{k}\upsilon_i + \Pi_k + \varepsilon^{\frac{1}{6}}\sum_{i=0}^{k}\xi_i) - \\ &- |x - x_k|^5 \sum_{i=0}^{k-1} f_{ix^5}^{(V)}(x,\sum_{i=0}^{k-1}\upsilon_i + \varepsilon^{\frac{1}{6}}\sum_{i=0}^{k-1}\xi_i). \end{aligned} \tag{5$_0$}$$

Уравнения для $[\Pi_k(\tau_k), \xi_k(x,\varepsilon)]$ возьмем в виде:

$$\dot{\Pi}_k = \sum_{i=0}^{k} f_{ix^5}^{(V)}(x_k,\upsilon_0(x_k) + \sum_{i=1}^{k}\upsilon_i(x_k) + \Pi_k), \tag{5$_1$}$$

$$\Pi_k(0) = A_k - \upsilon_k(x_k).$$

Имеет место оценка:

$$|\Pi_k| \le |A_k - \upsilon_k(x_k)| e^{-\alpha_k\tau_k},$$

где

$$\sum_{i=0}^{k} f_{ix^5y}^{(VI)}(x_k,\upsilon_0(x_k) + \sum_{i=1}^{k}\upsilon_i(x_k)) \le -\alpha_k = const > 0.$$

$$\varepsilon\xi_k' + \alpha_k |x - x_k|^5 \xi_k = g_k(x,\varepsilon) + \gamma_k(x,\xi_k,\varepsilon),$$

$$\xi_k(x_k) = 0.$$

Имеет место оценка:

$$|g_k(x,\varepsilon)| \le C_k \varepsilon^{\frac{5}{6}} + C_k |x-x_k|^5,$$

$$|\gamma_k(x,\xi_k,\varepsilon)| \le C_k |x-x_k|^5 |\Pi_k| |\xi_k| + C_k |x-x_k|^5 \varepsilon^{\frac{1}{6}} [|\xi_k| + |\xi_k|^2]$$

Переходим к интегральному уравнению:

$$\xi_k = \int_{x_k}^{x} e^{-\frac{\alpha_k}{6\varepsilon}[(x-x_k)^6-(s-x_k)^6]} \frac{1}{\varepsilon}[g_k(x,\varepsilon)+\gamma_k(s,\xi_k,\varepsilon)]ds.$$

Имеет место оценка

$|\xi_k| \le 4C_k$, на сегменте $x_k \le x \le 1$ при $\varepsilon \to 0$,

где $|A_k - \upsilon_k(x_k)| \le \dfrac{1}{2C_k} \quad 0 < \varepsilon^{\frac{1}{6}} < \dfrac{1}{4C_k(1+4C_k)}, \quad C_k > 0.$

Лемма доказана. Таким образом, совершается доказательство теоремы.

Литература:

1. Тихонов А.Н. Математический сборник. - М., 1952. - Т.31, №3. - С. 575-586.
2. Какишов К.К., Какишов Ж.К. Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: «Илим», 2014. - Выпуск 46.
3. Какишов К.К. Разрывные решения сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений. - IV конференция по дифференциальным уравнениям и их приложениям. - Руссе, Болгария, август, 1989 г. Рез. докл. и сообщ. - Руссе, 1989. - С. 138.
4. Какишов К.К. Сингулярные возмущения, имеющих разрывные решения. // Дифференциальные уравнения. - Бишкек, 1990. - Т. 26. - №12. - С. 2181.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Байзаков А.Б.