Ганиев Ч.Т., Юнуси М.К.

ПОПУЛЯЦИЯЛЫК ТУРБУЛЕНТТҮҮЛҮКТҮН БЕЛГИСИЗ КОЭФФИЦИЕНТТЕРИН АНЫКТООНУН ЖАНА МИЛДЕТТЕРИН ЧЕЧҮҮНҮН САНДЫК АЛГОРИТМДЕРИ

Ганиев Ч.Т., Юнуси М.К.

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Ch.T. Ganiev, M.K. Yunusi

NUMERICAL ALGORITHMS FOR DETERMINING UNKNOWN COEFFICIENTS AND SOLVING PROBLEMS OF POPULATION TURBULENCE

УДК: 519.63:519-7

Иште моделдик турбуленттүүлүктүн белгисиз коэффициенттерин аныктоонун сандык ыкмасы каралган жана экстремалдык режимдердеги популяциялардын саны аныкталган. Иште сунушталган эсептөө эксперименттеринин натыйжасында популяциялык турбуленттүүлүк милдетинин белгисиз коэффициенттерин аныктоонун алгоритми негизделди.

Негизги сөздөр: *сандык алгоритм, популяциялык турбуленттүүлүк, эсептөө эксперименттери, математикалык модель, биологиялык система, өз ара аракеттенүү матрицасы, тышкы ресурс, минималдаштыруу милдети, функционал, итерациялык процесс, популяциянын саны, коэффициент.*

В работе рассматривается численный способ определения неизвестных коэффициентов модельной турбулентности и определяются численности популяций в экстремальных режимах. В результате вычислительных экспериментов предложенной в работе обоснован алгоритм определения неизвестных коэффициентов задачи популяционной турбулентности.

Ключевые слова: *численный алгоритм, популяционная турбулентность, вычислительные эксперименты, математическая модель, биологическая система, матрица взаимодействия, внешний ресурс, задача минимизации, функционал, итерационный процесс, численность популяции, коэффициент.*

The paper considers a numerical method for determining unknown coefficients of model turbulence and determines the number of populations in extreme regimes. As a result of computational experiments, the algorithm proposed in the work is used to determine the unknown coefficients of the population turbulence problem.

Key words: *numerical algorithm, population turbulence, computational experiments, mathematical model, biological system, interaction matrix, external resource, minimization problem, functional, iterative process, population size, coefficient.*

1. Алгоритм определения неизвестных коэффициентов процесса популяционной турбулентности на основе компьютерных экспериментов.

Рассмотрим алгоритм определения неизвестных коэффициентов процесса популяционной турбулентности в биологических системах. Для определения этих неизвестных коэффициентов используем модели следующего вида:

$$\frac{dN_i}{dt} = b_i(T,W)N_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}N_iN_j + Q_i(t), \tag{1}$$

или

$$[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} + \sum V_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)]N_i = b_iN_i +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \frac{a_{ij}N_i}{1 + a^0_{ij}N_i}N_j + Q_i(t),\ i = \overline{1,m}$$

Введем обозначения: $\widetilde{N}_{ij} = N_i(t_j) + \xi_{ij},\quad i = \overline{1,n}$ (2)

где $N_i(t_j)$ численность определяемое с помощью (1), а $\widetilde{N}_{ij}$ - натурные наблюдения за численностью популяции в момент времени t_j; ξ_{ij} - означает ошибки эксперимента. Теперь сформулируем задачу определения неизвестных коэффициентов. Она состоит, в том, что определить на основе натурных наблюдений (2), и заданных коэффициентов смертности и рождаемости $b_i(T, W)$ и при известном закона поступления внешнего ресурса $Q_i(t)$, элементов матрицы взаимодействия биологический системы соответствующей пирамиды пищевых связей A. Матрицу A будем искать как решения следующей задачи минимизации:

$$\min_{A \in \Omega} I(A), \tag{3}$$

здесь $\Omega \subseteq R^{nxn}$ - означает некоторую область, из практических соображений для которого выполняется неравенство $N_i(t): |N_i(t)| \le C < \infty$. В качестве функционала берем:

$$I(A) = \sum_{k=1}^{m} P_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\tilde{N}_{ik} - N_i(t_k, A)\right] \lambda_{ij}^{k} \left[\tilde{N}_{jk} - N_i(t_k, A)\right],$$

$P_k \ge 0$, со суммой равно единице; $\Lambda(t_k)$ - дисперсионная матрица с элементами λ_{ij}^{k}. Теперь приведем алгоритм решения сформулированной задачи. В качестве начального приближения матрицы A^0 берем произвольное $a_{\alpha\beta}^{(0)}$. Тогда последовательность $\left\{a_{\alpha\beta}^{s}\right\}$ является минимизирующим согласно свойствам градиента и её будем строит по следующей схеме: $a_{\alpha\beta}^{s+1} = a_{\alpha\beta}^{s} - \int \nabla_{\alpha\beta}(A^s),\ s = 0,1,2.....,$здесь

$\nabla_{\alpha\beta}(A^{(s)}) = \left.\dfrac{\partial I}{\partial a_{\alpha\beta}}\right|_{A^s}$, $-p$-константы, которые дают минимум функционалу $\min\limits_{p \in [0,1]} I\left(\left\| a_{\alpha\beta}^{s} - p \nabla_{\alpha\beta}(A^s)\right\|\right)$. Итерационный процесс будем продолжать до тех пор, пока разность двух соседних шагах не становится меньше заданной точности. Далее определяется:

$$\nabla_{\alpha\beta}(A^s) = -\sum_{k=1}^{m} P_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}^{k} \left\{ \left[\tilde{N}_{jk} - N_j(t_k, A^s)\right] \left.\frac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}}\right|_{A^{(s)}, t_k} + \right.$$

$$\left. + \left[\tilde{N}_{ik} - N_i(t_k, A^s)\right] \left.\frac{\partial N_j}{\partial a_{\alpha\beta}}\right|_{A^{(s)}, t_k} \right\}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}}\right) = \begin{cases} b_i \dfrac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \left[\dfrac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}} N_j + \dfrac{\partial N_j}{\partial a_{\alpha\beta}} N_i\right], i \ne \alpha \\ b_i \dfrac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \left[\dfrac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}} N_j + \dfrac{\partial N_j}{\partial a_{\alpha\beta}} N_i\right] \quad i = 2. \end{cases}, \quad \left.\frac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}}\right|_{t=0} = 0$$

Заметим, что предложенный алгоритм можно применять и в случае популяционной турбулентности в биологических системах с учетом возрастной структуры и пространственных распределений.

То есть, оператор $\dfrac{d}{dt}$ заменяется на $\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial a}$ и на $\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial a} + \sum \left(\vartheta_1 \dfrac{\partial}{\partial_{x\tau}} + \dfrac{\partial}{\partial x_{x\tau}} \left(D_i \dfrac{\partial}{\partial_{xt}} \right) \right)$.

2. **Численные алгоритмы решения процесса популяционной турбулентности**. Расчетные формулы для проведения компьютерных экспериментов возьмем из работ [1-6]:

В следующем полиноме определяем формулу популяционной турбулентности.

$$u = u_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_1x_2 + \frac{C_1}{2}x_1^2 + \frac{C_2}{2}x_2^2, \quad \text{где}$$

$$u_0 = u(0,a,\tau),\ u_1 = \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_0,\ u_1 = \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_0,\ u_2 = \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_0,\ u_3 = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_0,\ C_1^n + C_2^n = C^n,\ n > 1.$$

$$a' = a,\quad t' = a + \tau,\ \varphi(x,a,\tau) = N(x,a,a+\tau),$$

$$u(x,a,\tau) = \varphi(x,a,\tau)\exp\left(\int_0^a F_0(\xi)d\xi + \sum_j \vartheta_j \frac{x_j}{2D_j} - \sum_j \frac{\vartheta_j^2 a}{4D_j}\right),$$

$$N(x,a,t) = u(x,a,t-a)\exp\left(-\int_0^a F_0(\xi)d\xi - \sum_j \vartheta_j \frac{x_j}{2D_j} + \sum_j \frac{\vartheta_j^2 a}{4D_j}\right),$$

равномерно сходимости рядов Фурье для биологической популяции с помощью 2-ого представления определяется в следующем виде:

$$N(x,a,t) = \frac{2}{L_1L_2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^1 e^{\delta^{\max(t-a)}} + \sum_{j=2}^{\infty} c_n^j e^{\alpha_n^j(t-a)} \cdot \cos\left(\omega_n^j)t - a)\right) *$$

$$* \exp\left\{-\lambda_n a + \int_0^a F(\xi)d\xi + \frac{\vartheta_1 x_1}{2D_1} + \frac{\vartheta_2 x_2}{2D_2}\right\}\cos\frac{\pi n_2 x_2}{L_1}\cos\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}$$

где

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{2}\left[\frac{\vartheta^2 k}{nD_k} + D_k\left(\frac{\pi n_k}{L_k}\right)^2\right], \qquad n = (n_1,\ n_2),\ n_k = 1,2,3,..., \qquad k = 1,2,$$

$c_n^j,\ j = 1,2,3,4,...$ являются коэффициентами разложения функции

$$\tilde{N}_n^0(a) = \int_0^{L_1}\int_0^{L_2} N_0(x,a)e^{-\frac{\vartheta_1 x_1}{2D_1} - \frac{\vartheta_2 x_2}{2D_2} - \int_0^a F(\xi)d\xi + \lambda_n a} \cdot \cos\frac{\pi n_1 x_1}{L_1}\cos\frac{\pi n_2 x_2}{L_2}$$

в ряд по экспонентам с показателями $\beta_n^j,\ \beta_n^i = \delta_n^{\max} + \lambda_a,\ \beta_n^j = \delta_n^j + \lambda_n,$

$$\delta_n^j = \alpha_n^j + i\omega_n^j, \qquad n = (n_1, n_2), n_k = 1,2,3,....\ k = 1,2;\ j = 2,3,4,...$$

По формуле трапеции вычисляются соответствующие интегралы.

3. Алгоритм численного решения типа локального одномерного метода. Для нелинейной трех диагональной системы алгоритм численного решения краевой задачи приводим в следующем виде:

$$\begin{cases} \bar{a}_{ij}\bar{Y}_{i+1j} - \bar{C}_{ij}\bar{Y}_{ij} + \bar{b}_{ij}\bar{Y}_{i-1j} = -\bar{f}_{ij}, & t' = t + \tau/2 \\ a_{ij}Y_{ij+1} - C_{ij}Y_{ij} + b_{ij}Y_{ij+1} = -f_{ij}, & t' = t + \tau \end{cases}, \tag{4}$$

$$\bar{a}_{ij} = \frac{\tau}{2h_1^2}D,\ \bar{b}_{ij} = \frac{\tau}{2h_1^2}D, \bar{C}_{ij} = \bar{a}_{ij} + \bar{b}_{ij},$$

$$\bar{f}_{ij} = Y_{ij},\ a_{ij} = \frac{\tau}{2h_2^2}D,\ f_{ij} = \bar{Y}_{ij},$$

$$a_{iij} = \frac{\tau}{2h_2^2} D,\ b_{ij} = \frac{\tau}{2h_2^2} D,\ C_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

при всех $i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{j_0 + 1, N_2},\ \overline{a}_{0j} = 1,\ \overline{b}_{0j} = 1,\ \overline{a}_{N_1+1j} = 0,\ \overline{b}_{N_1+1j} = 1,$

$$\overline{C}_{0j} = 1 + \frac{h_1^2}{2\tau D},\ \overline{C}_{N_1+1j} = 1 + h_1^2 / 2\tau D,$$

$$\overline{f}_{0j} = \frac{h_1^2}{2\tau D} \overline{Y}_{0j},\ \overline{f}_{N_1+1j} = \frac{h_1^2}{2\tau D} \overline{Y}_{N_1+1j},$$

при всех $j = \overline{j_0, N_2 + 1},\ a_{ij_0} \equiv 1,\ b_{ij_0} \equiv 1,\ C_{ij_0} = 1 + \frac{h^2}{2\tau D},$

$$a_{iN_2+1} \equiv 0,\ C_{iN_2+1} = 1 + \frac{h_2^2}{2\tau D},$$

$$f_{iN_2+1} = \frac{h_2^2}{2\tau D} \overline{Y}_{iN_2+1},\ f_{ij_0} = \frac{h_2^2}{2\tau D} \overline{Y}_{ij_0},$$

при всех $i = \overline{0, N_1 + 1}$.

Литература:

1. Юнуси М.К. Решение одного класса интегро-дифференциальных задач и его приложения в биологии. - Душанбе, 1998. - 51 с.
2. Юнуси М.К. Теорема о представлении сложных объектов, описываемых дифференциальными уравнениями полиномами. Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2013. - №1-1 (102). - С. 3-12.
3. Юнуси М.К., Ганиев Ч. Т., Одинаева С.А. Математические вопросы оценки популяционной численности. Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2012. - №1/3 (85). - С. 3-19.
4. Одинаева С.А., Ганиев Ч.Т., Азимов С. Численные расчеты региональных заповедников. Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. - 2014. - №1/3 (134). - С. 30-37
5. Юнуси М.К., Одинаева С.А., Махмадалиев Х., Гулов С. Математические модели оценки численности хищников экосистем региональных заповедников. Вестник Курган-Тюбинского государственного университета им. Носири Хисрава, 2016. - №2-2(38). - С. 34-52.
6. Одинаева С.А. Математические модели оценки численности хищников экосистем (на примере заповедника «Дашти-Джум»). // Вестник Таджикского национального университета 1(65). - Душанбе-Сино, 2011. - С. 7-19.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Курбоншоев С.