Одинаев Р.Н.

ЭРКИН ТРОФИКАЛЫК ФУНКЦИЯЛАРЫ БАР «ЗЫЯНДУУ КУРТ-КУМУРСКАЛАР - ПАЙДАЛУУ КУРТ-КУМУРСКАЛАР» ТИБИНДЕГИ БИОСИСТЕМАДАГЫ УБАКЫТ-ЖАШ КУРАК ТҮЗҮМҮН КӨҢҮЛГӨ АЛУУ МЕНЕН ӨСҮМДҮКТӨРДҮ КОРГОО ПРОЦЕССИНИН МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛДЕРИН ИШТЕП ЧЫГУУ

Одинаев Р.Н.

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССА ЗАЩИТЫ РАСТЕНИЙ С УЧЕТОМ ВРЕМЕННО-ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ В БИОСИСТЕМЕ ТИПА «ВРЕДНЫЕ НАСЕКОМЫЕ - ПОЛЕЗНЫЕ НАСЕКОМЫЕ» С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ТРОФИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

R.N. Odinaev

DEVELOPMENT MATHEMATICAL MODELS OF THE PLANT PROTECTION PROCESS, TAKING INTO ACCOUNT THE TEMPORAL-AGE STRUCTURE IN A BIOSYSTEM SUCH AS «HARMFUL INSECTS - USEFUL INSECTS» WITH ARBITRARY TROPHIC FUNCTIONS

УДК: 519.85-519-7

Бул иште эркин трофикалык функциялары бар «зыяндуу курт-кумурскалар - пайдалуу курт-кумурскалар» тибиндеги биосистемадагы убакыт-жаш курак түзүмүн көңүлгө алуу менен өсүмдүктөрдү коргоо процессинин математикалык моделдери каралды, эркин трофикалык функциялары бар өсүмдүктөрдү коргоо милдеттеринин чечилишинин зарыл жана жетиштүү шарттары табылды.

***Негизги сөздөр:** модель, процесс, өсүмдүктөрдү коргоо, курт-кумурскалардын саны, эркин трофикалык функция, биосистема, зыяндуу курт-кумурскалар, пайдалуу курт-кумурскалар.*

В данной работе рассматриваются математические модели процесса защиты растений с учетом временно-возрастной структуры в биосистеме типа «вредные насекомые - полезные насекомые» с произвольными трофическими функциями и сформулирована задача защиты растений. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи защиты растений с произвольными трофическими функциями.

***Ключевые слова:** модель, процесс, защита растений, численность насекомых, произвольная трофическая функция, биосистема, вредные насекомые, полезные насекомые.*

In this paper, we consider a mathematical model of the plant protection process, taking into account the temporal-age structure in a biosystem such as «harmful insects - useful insects» with arbitrary trophic functions, and formulated the so-called preparatory task of plant protection. Necessary and sufficient conditions for the solvability of the plant protection with arbitrary trophic functions are found.

***Key words:** model, process, plant protection, the number of insects, an arbitrary trophic function, biosystem, harmful insects, useful insects, preparatory task.*

Рассмотрим некоторую модельную биосистему, имеющую трехтрофический уровень. Вводим следующие обозначения: $N_i,\ N_i = N_i(t),\ i = \overline{0,3},$ где $N_0 = N_0(t) -$ масса внешнего ресурса в момент времени t, $N_1 = N_1(t) -$ биомасса растений сельхозкультуры в момент времени t, $N_i = N_i(t) -$ численность вредных $(i = 2)$ и полезных $(i = 3)$ насекомых в момент времени t.

Предположим, что состояние модельного агроценоза описывается при помощи следующих уравнений [1-8]:

$$\begin{cases} \frac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 N_0 N_1 \\ \frac{dN_1}{dt} = k_0 \alpha_0 N_0 N_1 - V_1(N_1) N_2 - m_1 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = k_1 V_1(N_1) N_2 - V_2(N_2) N_3 - m_2 N_2 \\ \frac{dN_3}{dt} = k_2 V_2(N_2) N_3 - \varepsilon {N_3}^2 - m_3 N_3 \end{cases} \quad N_i|_{t=0} = N_i^0,\ \ i = 0,1,2,3 \qquad (1)$$

$m_i,\ i = 1,2,3;\ k_i,\ i = 0,1,2;\ \alpha_i,\ i = 0,1,2;\ \varepsilon,$ биологические параметры, где $V_i(.)$ –трофическая функция со свойствами:

$$\frac{dV_i(N)}{dN} > 0, \quad \frac{d^2V_i(N)}{dN^2} \le 0, \quad i = 1{,}2.$$

Обозначим через

$$N_i^\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau N_i(t)dt \quad i = 1{,}2{,}3, \qquad \tau > 0, \qquad 0 \le \tau < \infty,$$

средней биомассой биологических видов.

На основе модельного агроценоза (1) сформулируем процесс защиты растений. N_1^p- определяет заданный уровень планируемого урожая, т.е.

$$N_1^\tau \ge N_1^p, N_1^p \in \left[N_1^{min},\ N_1^{max}\right] \qquad (2)$$

где $\left[N_1^{min},\ N_1^{max}\right] - const > 0$.

Теорема 1. Пусть трофическая функция имеет следующие свойства

$V_i(.)\ge 0, \quad \frac{dV_i}{dN} > 0,\ \frac{d^2V_i}{dN^2} \le 0,$

$0 < \min\limits_{0\le t\le\tau} \frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)} = \overline{\alpha_1} < \infty,\ 0 < \max\limits_{0\le t\le\tau} \frac{V_2(N_2(t))}{N_2(t)} = \overline{\alpha_2} < \infty,$

$\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2} = const$, тогда для выполнения условия

$N_1^\tau \ge N_1^P,\ \ N_1^P \in \left[N_1^{min}, N_1^{max}\right]$, необходимо и достаточно,

выполнения следующих неравенств:

$$\begin{cases} N_0(t) \le \frac{Q}{\alpha_0 N_1^P} \\ N_2^\tau \le N_2^P,\ \ N_2^p = \frac{k_0 Q}{\overline{\alpha_1} N_1^P} - \frac{m_1}{\overline{\alpha_1}} - \frac{1}{\overline{\alpha_1}\tau}\cdot ln\frac{N_1(\tau)}{N_1(0)}, \\ N_3^\tau \le N_3^P,\ \ N_3^p = \frac{k_1\overline{\alpha}_1}{\overline{\alpha_2}} N_1^P - \frac{m_2}{\overline{\alpha_2}} - \frac{1}{\overline{\alpha_2}\tau}\cdot ln\frac{N_2(\tau)}{N_2(0)} \end{cases} \qquad (3)$$

Необходимость. Пусть

$$N_1^\tau \ge N_1^P,\ \ N_1^P \in \left[N_1^{min}, N_1^{max}\right].$$

Покажем справедливость (3).

Из 1-го уравнения системы (1) получим:

$$\frac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 N_0 N_1,$$

$$N_0(t) \le N_0 \exp\left(-\alpha_0\int_0^t N_1(\tau)d\tau\right) + Q\int_0^t \exp\left(-\alpha_0\int_\tau^t N_1(\xi)d\xi\right)d\tau \le \left[N_0(0) - \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right]\exp\left(-\alpha_0 N_1^p t\right) + \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}.$$

Отсюда $N_0(t) \le \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^p},\ 0 \le t \le t_k, \quad \left(N_0(0) = \dfrac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right).$

Из 2-го уравнения системы (1) имеем:

$\frac{dN_1}{dt} = k_0\alpha_0 N_0 N_1 - V_1(N_1)N_2 - m_1 N_1\ ,$

$\frac{d}{dt} lnN_1 = k_0\alpha_0 N_0 - \frac{V_1(N_1)}{N_1}N_2 - m_1,\ \frac{V_1(N_1)}{N_1}N_2 = k_0\alpha_0 N_0 - m_1 - \frac{d}{dt}lnN_1$

$$\frac{V_1(N_1)}{N_1}N_2 = \frac{k_0 Q}{N_1^P} - m_1 - \frac{d}{dt}lnN_1.$$

После интегрирования по t от 0 до τ получим:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)} N_2(t)\,dt = \frac{k_0 Q}{N_1^P} - m_1 - \frac{1}{\tau} ln\frac{N_1(\tau)}{N_1(0)},$$

т.е. $0<\min\limits_{0\le t\le\tau}\frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)} N_2^\tau = \frac{k_0 Q}{N_1^P} - m_1 - \frac{1}{\tau} ln\frac{N_1(\tau)}{N_1(0)}$,

так как $0<\min\limits_{0\le t\le\tau}\frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)} = \bar{\alpha}_1 < \infty$

$$N_2^\tau \le \frac{k_0 Q}{N_1^P} - \frac{m_1}{\bar{\alpha}_1} - \frac{1}{\bar{\alpha}_1\tau} ln\frac{N_1(\tau)}{N_1(0)} = N_2^p$$

$$N_2^\tau \le N_2^P.$$

На основе 3-го уравнения (1) получим:

$\frac{dN_2}{dt} = k_1 V_1(N_1)N_2 - V_2(N_2)N_3 - m_2 N_2$

$\frac{d}{dt}\ln(N_1) = k_1 V_1(N_1) - m_2 - \frac{V_2(N_2)N_3}{N_2}$,

Интегрируя последнее неравенство по t от 0 до τ, имеем:

$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{V_2(N_2(t))}{N_1(t)} N_3(t)\,dt = k_1\bar{\alpha}_1 N_1^P$-$m_2$-$\frac{1}{\tau}\ln\frac{N_2(\tau)}{N_2(0)}$, $0<\max\limits_{0\le t\le\tau}\frac{V_2(N_2(t))}{N_2(t)} N_3^\tau \ge k_1\bar{\alpha}_1 N_1^P - m_2 - \frac{1}{\tau} ln\frac{N_2(\tau)}{N_2(0)}$

$0<\max\limits_{0\le t\le\tau}\frac{V_2(N_2(t))}{N_2(t)} = \bar{\alpha}_2 < \infty$,

$N_3^\tau \ge \frac{k_1\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2} N_1^P - \frac{m_2}{\bar{\alpha}_2} - \frac{1}{\tau\bar{\alpha}_2} ln\frac{N_2(\tau)}{N_2(0)} = N_3^P$, $N_3^\tau \le N_3^P$.

Теперь оценим $maxN_3$.

На основе 4-го уравнения системы (1) имеем:

$\frac{dN_3}{dt} = k_2 V_2(N_2)N_3 - \varepsilon N_3^2 - m_3 N_3$

После обозначения $A(t) = k_2 V_2(N_2) - m_3$, получим:

$\max\limits_t N_3 \le \max\limits_t\left[\frac{N_3(0)e^{\int_0^t A(t)dt}}{1+\varepsilon N_3(0)\int_0^t e^{\int_0^t A(t)dt}dt}\right] \le N_{max}$, где N_{max} = const<∞.

$\frac{dN_3}{dt} = A(t)N_3(t) - \varepsilon N_3^2(t)$.

$$-\frac{1}{N_3^2}\frac{dN_3}{dt} = -\frac{A(t)}{N_3} + \varepsilon, \qquad -\frac{1}{N_3^2} = y$$

$$y'(t) = -A(t)y + \varepsilon$$

$$y(t) = y(0)e^{\int_0^t A(t)dt} + \varepsilon\int_0^t e^{\int_0^t A(t)dt}dt$$

$$\frac{1}{N_3(\alpha)} = \frac{1}{N_3(0)}e^{\int_0^t A(t)dt} + \varepsilon\int_0^t e^{\int_0^t A(t)dt}dt$$

Достаточность. Пусть выполняется условие (3). Докажем справедливость

$N_1^\tau \ge N_1^p \quad N_1^p \in [N_1^{min}, N_1^{max}]$.

Из первого уравнения системы (1) имеем

$\dot{N}_0 = Q - \alpha_0 N_0 N_1 \ge Q - \alpha_0 N_0 \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}$,

$\frac{Q}{N_1^p} N_1 \ge Q - \dot{N}_0$, после интегрирования по t от 0 до τ :

$\frac{QN_1^\tau}{N_1^p} \geq Q + \frac{1}{\tau}[N_0(0) - N_0(\tau)] \geq Q + \frac{1}{\tau}\left[N_0(0) - \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p}\right] = Q.\quad \frac{QN_1^\tau}{N_1^p} \geq Q.$

Итак, $N_1^\tau \geq N_1^p$.

$N_2^p \geq 0$ и $N_3^p \geq 0$, то $N_1^p \in \left[N_1^{min},\ N_1^{max}\right]$.

Теперь рассмотрим математическую модель задачи защиты растений с учетом возрастной структуры вредных и полезных насекомых при произвольных трофических функциях. Модельная система при этом имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 N_0 N_1, \\ \frac{dN_1}{dt} = k_0\alpha_0 N_1 - V_1(N_1)\widetilde{N}_2 - m_1 N_1, \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{\partial N_2}{\partial a} = k_1 V_1(N_1) N_2 - V_2(N_2)\widetilde{N}_3 - m_2 N_2,\ \ N_2|_{t=0} = N_2^0(a) \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} + \frac{\partial N_3}{\partial a} = k_2 V_2(N_2) N_3 - \varepsilon N_3^2 - m_3 N_3,\ \ N_3|_{t=0} = N_3^0(a) \\ N_2(0,t) = \int_0^\infty B_2(\xi, t, N_1) N_2(\xi, t) d\xi, \\ N_3(0,t) = \int_0^\infty B_3(\xi, t, \widetilde{N}_2) N_3(\xi, t) d\xi. \end{cases} \quad (4)$$

где $N_i = N_i(a,t)$ – численность вредных ($i = 2$) и полезных ($i = 3$) насекомых возраста a в момент времени t. $B_i(.)$ – коэффициент рождаемости насекомых.

Введем обозначения $\widetilde{N}_i(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \widetilde{N}_i(t)dt$, $\quad i = 2{,}3, \quad \tau > 0.$

Теорема 2. Пусть $V_i(.) \geq 0$, $\frac{dV_i}{dN} > 0$, $\frac{d^2V_i}{dN^2} \leq 0$,

$$0 < \min_{\substack{0\le a<\infty \\ 0\le t\le\tau}} \frac{V_1(N_1(t))}{N_1(t)} = \overline{\alpha}_1 < \infty,\quad 0 < \max_{\substack{0\le a<\infty \\ 0\le t\le\tau}} \frac{V_2(N_2(a,t))}{N_2(a,t)} = \overline{\alpha}_2 < \infty\ ,$$

$\overline{\alpha}_1 \cdot \overline{\alpha}_2 = \mathrm{const}$, $\ i = 1{,}2$. Тогда для того, чтобы имело место условие собираемого планового урожая $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau N_1(t)dt \geq N_1^P, \mathrm{N_1^P} \in [\mathrm{N_1^{min}}, \mathrm{N_1^{max}}]$.

$$\begin{cases} N_0(t) \leq \frac{Q}{\alpha_0 N_1^P},\ \ 0 \leq t \leq \tau, \\ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \widetilde{N}_2(t)dt \leq N_2^P, \\ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \widetilde{N}_3(t)dt \geq N_3^P, \end{cases} \qquad \begin{aligned} N_2^p &= \frac{k_0 Q}{\overline{\alpha_1} N_1^P} - \frac{m_1}{\overline{\alpha_1}} - \frac{1}{\overline{\alpha_1}\tau}\cdot ln\frac{N_1(\tau)}{N_1(0)}, \\ N_3^p &= \frac{k_1\overline{\alpha}_1}{\overline{\alpha_2}} N_1^P - \frac{m_2}{\overline{\alpha_2}} - \frac{1}{\overline{\alpha_2}\tau}\cdot \max_a ln\frac{N_2(a,\tau)}{N_2(a,0)}\ . \end{aligned} \quad (5)$$

Необходимость. Пусть $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathrm{N_1(t)dt} \geq \mathrm{N_1^P}$, $\quad N_1^P \in \left[N_1^{min}, N_1^{max}\right]$. Доказываем выполнения неравенства (5). Справедливость первой и второй (5) доказываются как в (3).

Используя 3-е уравнение системы (4) докажем справедливость третьего неравенства (5):

$\frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{\partial N_2}{\partial a} = k_1 V_1(N_1) N_2 - V_2(N_2)\widetilde{N}_3 - m_2 N_2.$

Произведем замену переменных $a = t + \xi,\ \varphi(t,\xi) = N_2(a,t)$

Тогда $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{\partial N_2}{\partial a}$ и из последнего уравнения имеем

$\frac{\partial}{\partial t}\ln\varphi = k_1 V_1(N_1) - m_2 - \frac{V_2(N_2)\widetilde{N}_3}{N_2}$, так как $\frac{V_2(N_2)}{N_2}\widetilde{N}_3(\mathrm{t}) = k_1 V_1(N_1) - m_2 - \frac{\partial}{\partial t}\ln\varphi$, то,

интегрируя последнее уравнение по t от 0 до τ, имеем:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\frac{V_2(N_2)}{N_2}\widetilde{N}_3(\mathrm{t})\,dt = k\overline{\alpha}_1 N_1^p - m_2 - \frac{1}{\tau}\ln\frac{N_2(a,\tau)}{N_2(a,0)}, \text{ отсюда:}$$

$$0 < \max_{0\le t\le\tau}\frac{V_2(N_2)}{N_2}\widetilde{N}_3(\mathrm{t}) \ge k_1\overline{\alpha}_1 N_1^p - m_2 - \frac{1}{\tau}\ln\frac{N_2(a,\tau)}{N_2(a,0)}, \text{ так как}$$

$$0 < \max_{0\le t\le\tau}\frac{V_2(N_2(a,t))}{N_2(a,t)} = \overline{\alpha}_2 < \infty, \text{ то } \widetilde{N}_3(\mathrm{t}) \ge \frac{k_1\overline{\alpha}_1}{\overline{\alpha}_2}N_1^p - \frac{m_2}{\overline{\alpha}_2} - \frac{1}{\tau\overline{\alpha}_2}\max_a \ln\frac{N_2(a,\tau)}{N_2(a,0)} = N_3^p.$$

Отсюда $\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\widetilde{N}_3(t)dt \ge N_3^P$.

Достаточность устанавливается аналогично доказательству теоремы 1.

Литература:

1. Одинаев Р.Н., Косимов Ш.Н. Исследование точечной математической модели задачи защиты растений в нестационарном случае // Вестник Таджикского национального университета, №1/3 (134). - Душанбе, 2014. - С. 6-10.
2. Одинаев Р.Н., Косимов Ш.Н. Определение критических значений задачи защиты растений // Материалы Республиканской научной-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной «25-летию государственной Независимости Республики Таджикистан»). - Душанбе, 2016. - С. 47-48.
3. Одинаев Р.Н. Необходимое и достаточное условие существования решения задачи защиты растений. Доклады АН РТ, том 58, № 10. - Душанбе, 2015. - С. 879-886.
4. Одинаев Р.Н. Об одной нелинейной математической модели защиты растений с учетом возрастной структуры. Вестник Таджикского национального университета 1/2 (196). – Душанбе, 2016. - С. 13-17.
5. Одинаев Р.Н. Исследование математической модели задачи защиты растений в стационарном случае. Вестник Таджикского национального университета, №1/3 (110). - Душанбе, 2013. - С. 7-11.
6. Одинаев Р.Н., Юнуси. М.К. Математическая модель защиты растений в биосистеме трех трофических уровней с учетом возрастной структуры. // Труды Международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций. - Таджикистан. - Душанбе, 15-25 августа 2016. - С. 186-190.
7. Одинаев Р.Н. Задача защиты растений для точечных моделей и произвольных трофических функциях. Вестник Таджикского национального университета, №1/3 (85). - Душанбе, 2012. - С. 28-36.
8. Юнусов М.К. Математические модели борьбы с вредителями агроценозов. - Душанбе: Дониш, 1991. - 146 с.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Раджбаев Н.