Байгазиева Н.А.

БИР КАЛЫПТУУ ПАРАКОМПАКТТУУ МЕЙКИНДИКТЕР

Байгазиева Н.А.

РАВНОМЕРНО ПАРАКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

N.A. Baigazieva

UNIFORM PARACOMPACT SPACES

УДК: 515.12

Жалпы топологияда паракомпакттуу мейкиндиктер негизги ролду ойнору жалпыга маалым. Топологиялык мейкиндиктерди униформизациялоо, башкача айтканда маанилүү топологиялык касиеттердин аналогдорун табуу жана изилдөө маселесине байланыштуу бир калыптуу паракомпакттуулукту киргизүү үчүн бир нече аракеттер болгон. Белгилүү болгондой, азыркы мезгилде бир калыптуу паракомпакттуулуктун аныктамасына болгон түрдүү берилиштер бар. Мисалы, Райстын маанисиндеги бир калыптуу R -паракомпакттуулук [1], Бөрүбаевдин маанисиндеги бир калыптуу B - паракомпакттуулук [2], Фроликтин маанисиндеги бир калыптуу F -паракомпакттуулук [3], Пасынковдун маанисиндеги бир калыптуу P - паракомпакттуулук [4]. Бул илимий макалада бир калыптуу мейкиндиктердин бир калыптуу паракомпакттуулугу изилденген. Алардын башка бир калыптуу-топологиялык касиеттер, мисалы, компактуу, күчтүү бир калыптуу паракомпакттуу жана күчтүү бир калыптуу локалдуу компакттуу мейкиндиктер менен болгон байланыштары изилденген. Бул касиеттин Хаусдорфтук компакттуу кеңейүү жана бир калыптуу мейкиндиктердин бир калыптуу чагылдыруулары аркылуу мүнөздөмөлөрү берилген, ошондой эле, бул касиеттин туюк мейкиндиктерге берилиши көрсөтүлгөн. Компакттуу бир калыптуу мейкиндиктин бир калыптуу паракомпакттуу мейкиндикке болгон көбөйтүндүсү бир калыптуу паракомпакттуу болору, каалагандай бир калыптуу паракомпакттуу мейкиндик толук бир калыптуу мейкиндик болору далилденген жана толук эмес метризацияланган мейкиндик бир калыптуу паракомпакттуу эмес экендиги мисал менен көрсөтүлгөн.

Негизги сөздөр: *бир калыптуу мейкиндик, бир калыптуу паракомпакттуу мейкиндик, чектүү аддитивдүү жабдуу, ачык жабдуу, бир калыптуу жабдуу, консервативдүү жабдуу, бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруу.*

Общеизвестно, что паракомпактные пространства играют важную роль в общей топологии. В связи с задачей об униформизации теории топологических пространств, т.е. о нахождении и исследовании равномерных аналогов важнейших топологических свойств, было несколько попыток ввести равномерную паракомпактность. Как известно, в настоящее время существуют различные подходы к определению равномерной паракомпактности. Например, равномерная R -паракомпактность в смысле Райса [1], равномерная B -паракомпактность в смысле Борубаева [2], равномерная F -паракомпактность в смысле Фролика [3], равномерная P -паракомпактность в смысле Пасынкова [4]. В настоящей статье исследуются равномерная паракомпактность равномерных пространств. Изучена их связь с другими равномерно-топологическими свойствами, например, компактными, сильно равномерно паракомпактными и сильно равномерно локально компактными пространствами. Даны характеристики этих свойств равномерных пространств, при помощи Хаусдорфовых компактных расширений и равномерных отображений равномерных пространств. Показаны, что эти свойства наследуется замкнутыми подпространствами. Доказано, что произведение компактного равномерного пространства на равномерно паракомпактное пространство является равномерно паракомпактным, всякое равномерно паракомпактное пространство является полным равномерным пространством и на примере показано, что не полные метризуемые равномерные пространства не являются равномерно паракомпактными пространствами.

Ключевые слова: *равномерное пространство, равномерно паракомпактное пространство, конечно аддитивное покрытие, открытое покрытие, равномерное покрытие, консервативное покрытие, равномерно непрерывное отображение.*

It is well known that paracompact spaces play an important role in General Topology. According to the problem of uniformizing the theory of topological spaces, that is, finding and investigating uniform analogs of the most important topological properties, there were several attempts to introduce uniform paracompactness. It is known that there are several different approaches to define the uniform paracompactness. For example, uniform R - paracompactness in the sense Rice's [1], uniform B -paracompactness in the sense Borubaev's [2], uniform F - paracompactness in the sense Frolic's [3], uniform P -paracompactness in the sense Pasynkov's [4]. In this paper, we study the uniform paracompactness of uniform space. The connections with other uniformly topological properties are studied, for example, compact spaces, strongly uniformly paracompact spaces, strongly uniformly locally compact spaces. The characteristics of these classes of uniform spaces are given, using Hausdorff compact extensions and uniformly continuous mappings of uniform spaces. It is shown that these are inherited by closed subspaces. It is proved that the product of a compact uniform space on uniformly paracompact space is uniformly paracompact. It is proved that every uniformly paracompact space is a complete uniform space and the example shown that non-complete metrizable uniform spaces are not uniformly paracompact spaces.

Key words: *uniform space, uniform paracompact space, finitely additive covering, open covering, uniform covering, conservative covering, uniformly continuous mapping.*

Для покрытия α подмножеств множества X, положим $\alpha^{\angle} = \{\cup\beta : \beta \subset \alpha, \beta - \text{конечное}\}$. Открытое покрытие α называется конечно аддитивным открытым (КАО) покрытием, если $\alpha^{\angle} = \alpha$ [6].

Равномерное пространство (X,Σ) называется равномерно паракомпактным (u-РП), если в любое его КАО покрытие можно вписать комбинаторное равномерное покрытие. Это определение принадлежит Б.Э. Канетову.

Предложение 1. Пусть (X,Σ) u-РП пространство, тогда топологическое пространство (X,τ_Σ) является паракомпактным, обратно, пусть (X,τ) - паракомпактное топологическое пространство, тогда равномерное пространство (X,U), где U - универсальная равномерность, является u-РП.

Доказательство. Пусть λ - произвольное открытое покрытие пространства (X,τ_U). В КАО покрытие $\lambda^{\angle}$ равномерного пространства (X,Σ) впишем комбинаторное равномерное покрытие $\beta \in U$. Для каждого $B \in \beta$ выберем $L_B \in \lambda^{\angle}$ так, что $B \subset L_B$, где $L_B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} L_i$, $L_i \in \alpha$, $i = 1,2,...,n$. Пусть $\mu = \cup\{\lambda_B : B \in \beta\}$, $\lambda_B = \{B \cap A_i : i = 1,2,...,n\}$. Тогда μ является комбинаторным покрытием пространства (X,τ_Σ), вписанным в открытое покрытие α. Следовательно, пространство (X,τ_Σ) является паракомпактным.

Обратно, пусть (X,τ) - паракомпактное пространство и λ - произвольное КАО покрытие пространства (X,Σ). В силу u - РП пространства (X,τ) в покрытие λ можно вписать комбинаторное открытое покрытие γ. Покрытие γ является комбинаторным равномерным покрытием, так как, каждое открытое покрытие является равномерным относительно максимальной равномерности U пространства (X,τ). Итак, покрытие $\gamma \in U$ является комбинаторным покрытием.

Теорема 1. Пусть (X,Σ) - равномерное пространство, γX - некоторое хаусдорфово компактное расширение пространства (X,τ_Σ). Тогда следующие условия равносильны:

1. (X,Σ) является u - РП пространством;
2. Для любого компакта $T \subset \gamma X \setminus X$ существует комбинаторное покрытие $\lambda \in \Sigma$ такое, что $\overline{L}_{cX} \cap T = \varnothing$ для любого $A \in \alpha$.

Доказательство. $1. \Rightarrow 2.$ Пусть (X,U) - u-РП и $T \subset \gamma X \setminus X$ - произвольный компакт. Для любого $y \in X$ найдется открытое множество N_y такое, что последнее имеет не пустое пересечение с компактом T. Пусть $\beta = \{U_y \cap X : y \in X\}$. В КАО покрытие $\beta^{\angle}$ можно вписать комбинаторное покрытие $\omega \in \Sigma$. Легко видеть, что $\overline{W}$ содержится в $\bigcup\limits_{n=1}^{k} \overline{U}_{y_{ni}}$. Следовательно, $\overline{W} \cap T = \varnothing$ для любого $W \in \omega$.

$2. \Rightarrow 1.$ Возьмем любое КАО покрытие λ из (X,Σ) и α - такая система в γX, что $\alpha \wedge \{X\} = \lambda$. Пусть $T = \gamma X \setminus \cup\alpha$. Тогда T - компакт, поэтому существует такое комбинаторное покрытие $\beta \in U$, что $\overline{B} \cap T = \varnothing$ для любого $B \in \beta$. Ясно, что компакт $\overline{B} \subset \gamma X$. Тогда существуют $A_n \in \alpha$, $n = 1,2,...,k$ такие, что $\overline{B} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n$. Следовательно, $B \subset \bigcup\limits_{n=1}^{k} L_n$, где $\bigcup\limits_{n=1}^{k} L_n \in \lambda$. Следовательно, пространство (X,Σ) является u - РП пространством.

Равномерное пространство (X,Σ) будем называть равномерно b - локально компактным, если существует комбинаторное покрытие $\omega \in \Sigma$, состоящее из компактных подмножеств.

Легко видеть, что всякое равномерно b - локально компактное пространство является равномерно локально компактным, а обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Предложение 2. Любое равномерно b - локально компактное пространство u - РП пространство.

Доказательство. Возьмем любое КАО покрытие λ. Пусть $\eta \in \Sigma$ - комбинаторное покрытие, состоящее из компактных подмножеств. Легко видеть, что оно вписано в КАО покрытие λ.

Равномерное пространство (R,Σ_R) с естественной равномерностью Σ_R u - РП пространство. Действительно, пусть λ - произвольное КАО покрытие пространства действительных чисел R. Пусть $\mu = \{(m-1,m+1) : m \in Z\}$. Очевидно, что $\mu \in \Sigma_R$ - комбинаторное покрытие пространства R. Множество $[m-1,m+1]$ компактно, и потому, существует конечное семейство $\{L_1,L_2,...,L_n\}$, $L_i \in \lambda$, $i = 1,2,...,n$ и

$(m-1,m+1)\subset[m-1,m+1]\subset\bigcup_{i=1}^{n}L_i$. Итак, $\beta\succ\alpha^{\angle}=\alpha$, т.е. ространство (R,Σ_R) с естественной равномерностью Σ_R является u-РП пространством.

Предложение 3. Любое u - РП пространство (X,Σ) полно.

Доказательство. Пусть (X,Σ) - u-РП пространство и Φ - произвольный фильтр Коши. Пусть F - не сходящий фильтр Коши пространства (X,Σ). Для любого y существует такие открытая окрестность U_y и $N_y\in\Phi$ такие, что $N_y\cap U_y=\varnothing$. Пусть $\{U_y : y\in X\}=\alpha$. Тогда для КАО покрытия $\alpha^{\angle}$ существует такое комбинаторное покрытие $\beta\in\Sigma$, которое вписано в $\alpha^{\angle}$. Отсюда следует, что $\alpha^{\angle}\cap\Phi\neq\varnothing$ т.е. существует $U_{y_1},U_{y_2},...,U_{y_n}\in\alpha$ такие, что $\bigcup_{i=1}^{n}U_{y_i}\in\alpha^{\angle}\cap\Phi$. Тогда $(\bigcap_{j=1}^{m}N_{y_j})\cap(\bigcup_{i=1}^{n}U_{y_i})\neq\varnothing$ и $\bigcap_{i=1}^{m}N_{y_i}\in\Phi$, $\bigcup_{i=1}^{n}O_{y_i}\in\Phi$. Получили противоречие, следовательно, (X,Σ) - u - РП пространство.

Равномерное пространство (I,U_I), где $I=(0,1)$, не является полным. Следовательно, пространство (I,U_I) не будет u - РП пространством.

Предложение 4. Пусть (Y,Σ_Y) - замкнутое подпространство u - РП пространства (X,Σ). Тогда (Y,Σ_Y) - u - РП пространство.

Доказательство. Рассмотрим произвольное конечно аддитивное открытое покрытие λ_Y пространства (Y,Σ_Y). Пусть $\lambda=\{\lambda_Y, X\setminus Y\}$. Покрытие λ является КАО покрытием. Тогда существует комбинаторное покрытие $\mu\in\Sigma$, вписанное в λ. Положим $\mu_Y=\mu\wedge\{Y\}$. Легко видеть, что μ_Y есть комбинаторное равномерное покрытие подпространства Y, вписанное в λ.

Напомним [5], что равномерно непрерывное отображение $g:(X,\Sigma)\to(Z,\mathrm{N})$ равномерного пространства (X,Σ) в равномерное пространство (Z,N) называется σ-отображением, где σ - открытое покрытие пространства (X,Σ), если для каждой точки $z\in Z$ существует окрестность U_z и $L\in\lambda$ такие, что $g^{-1}(U_z)\subset L$.

Теорема 2. Пусть σ - произвольное КАО покрытие. При σ - отображениях $g:(X,\Sigma)\to(Z,\mathrm{N})$ u - РП свойство сохраняется в сторону прообраза.

Доказательство. Пусть σ - любое КАО покрытие (X,Σ) и $g:(X,\Sigma)\to(Z,\mathrm{N})$ - σ - отображение. Для любого z из Z найдется такая окрестность U_z, что $f^{-1}U_z\subset G$, для некоторого $G\in\sigma$. Пусть $\{U_z : z\in Z\}=\omega$. Впишем в покрытие $\omega^{\angle}$ комбинаторное покрытие $\zeta\in\mathrm{N}$. Легко видеть, что $g^{-1}\varsigma\in\Sigma$ и $g^{-1}\varsigma\succ\sigma$. Таким образом, u-РП свойства пространства (X,U) доказана.

В работе [2] показано, что любое равномерно совершенное отображение $g:(X,\Sigma)\to(Z,\mathrm{N})$ равномерного пространства (X,Σ) в равномерное пространство (Z,N) является σ -отображением.

Следствие 1. Если отображение $g:(X,\Sigma)\to(Z,\mathrm{N})$ равномерного пространства (X,Σ) в u - РП пространство (Z,N) является равномерно совершенным, то пространство (X,Σ) также является u - РП пространством.

Теорема 3. Пусть (X,Σ) - u -РП пространство и T - компакт. Тогда пространство $(X,\Sigma)\times T$ является u - РП пространством.

Доказательство. Пусть (X,Σ) - u - РП пространство и T - компакт. Известно [2], что проекция $\pi_X:(X,\Sigma)\times T\to(X,\Sigma)$ равномерно совершенна. Тогда она является σ -отображением, где σ - КАО покрытие пространства $(X,\Sigma)\times T$. Следовательно, $(X,\Sigma)\times T$ согласно теореме 2 есть u - РП пространство.

Следствие 2. Равномерное произведение любого дискретного пространства (X,Σ) и любого компактного пространства Tявляется u - РП пространством.

Пространство (X,Σ) называется сильно равномерно паракомпактным (СРП), если в каждое конечно аддитивное открытое покрытие можно вписать звездно конечное равномерное покрытие (см. [6]).

Предложение 5. Если пространство (X,Σ) является u - РП равномерно локально компактным пространством, то оно является СРП пространством.

Доказательство. Пусть пространство (X,Σ) - является u - РП равномерно локально компактным пространством, λ - любое КАО покрытие пространства (X,Σ) и $\delta\in\Sigma$ покрытие, состоящее из компактных подмножеств. Тогда найдется комбинаторное равномерное покрытие $\theta\in\Sigma$, что $\theta\succ\delta^{\angle}$. Каждое $O\in\theta$, очевидно, содержится в некотором множестве $D_O = \bigcup_{k=1}^{m} D_k \in \delta^{\angle}$. Из $\overline{O} \subset D_O$, следует, что $[O]$ компактно. Итак, комбинаторное равномерное покрытие $\{\overline{O} : O \in \theta\}$ вписано в покрытие α. Значит, (X,Σ) u- РП пространство.

Теорема 4. Пространство (X,Σ) СРП тогда и только тогда, когда пространство (X,Σ) является u-РП и топологическое пространство (X,τ_Σ) является СП пространством.

Доказательство. Необходимость очевидно.

Достаточность. Возьмем любое КАО покрытие λ пространства (X,Σ). Пусть β - звездно конечное покрытие, вписанное в α. Легко видеть, что покрытие $\beta^{\angle}$ является КАО и звездно конечным покрытием. В покрытие $\beta^{\angle}$ впишем комбинаторное равномерное покрытие $\gamma \in \Sigma$. Следовательно, $\beta^{\angle} \succ \lambda$. СРП пространства (X,Σ) доказано.

Если (X,Σ) u- РП пространство и его топологическое пространство (X,τ_Σ) - локально компактно, то равномерное пространство (X,Σ) СРП.

Теорема 5. Локально компактное пространство (X,Σ) является u- РП пространством в том и только том случае, если равномерное пространство (X,Σ) является сильно равномерно локально компактным.

Доказательство. Пусть (X,Σ) - РП и (X,τ_U) - локально компактно. Тогда для каждого y существует такая окрестность U_y, что $\overline{U}_y$ компактно. Ясно, что семейство $\alpha = \{U_y : y \in X\}$ есть покрытие пространства (X,Σ). Через $\alpha^{\angle}$ обозначим семейство, состоящее из всевозможных конечных объединений покрытия α. В него впишем консервативное равномерное покрытие $\lambda \in \Sigma$. Для любого $L \in \lambda$ найдется такое множество $\bigcup_{k=1}^{m} U_{y_k}$, что $L \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{y_k}$. Тогда из включения $L \subset [\bigcup_{k=1}^{m} U_{y_{ki}}]$ следует, что $\overline{L}$ компактно. Итак, $\overline{\lambda} = \{\overline{L} : L \in \lambda\}$ искомое покрытие. Значит, (X,Σ) сильно равномерно локально компактно.

Достаточность. Пусть β такое комбинаторное равномерное покрытие, которое состоит из компактов. Для любого КАО покрытия λ имеем $\beta \succ \lambda$. Следовательно, (X,Σ) является u-РП пространством.

Литература:

1. Rice M.D. A note on uniform paracompactness. Proc. Amer. Math. Soc, vol. 62(1977), no. 2, 359-362.
2. Борубаев А.А. Равномерная топология. - Бишкек: Илим, 2013.
3. Frolik Z. On paracompact uniform spaces. - Czechoslovak Math. J., vol. 33(1983), 476-484.
4. Buhagiar D., Pasynkov B. On uniform paracompactness. - Czechoslovak Math. J. vol. 46(1996), no. 121, 577-586.
5. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. - Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына, 2013.
6. Канетов Б.Э. Сильно равномерно паракомпактные пространства // Известия национальной академии наук КР. - Бишкек, 2012.- №2. - С.109-113.

Рецензент: академик НАН КР, д.ф.-м.н., профессор Борубаев А.А.