Намазова Г.О., Болжиев Б.А., Касымова Т.Дж.

КОМПАКТТУУ ЭМЕС СЕПАРАБЕЛДҮҮ ХАУСДОРФТУК УЛЬТРАКОМПАКТУУ МЕЙКИНДИК

Намазова Г.О., Болжиев Б.А., Касымова Т.Дж.

НЕКОМПАКТНОЕ СЕПАРАБЕЛЬНОЕ ХАУСДОРФОВО УЛЬТРАКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

G.O. Namazova, B.A. Boljiev, T.D. Kasymova

THE NONCOMPACT SEPARABLE HAUSDORF ULTRACOMPACT SPACE

УДК: 515. 123.

Сепарабелдүү Хаусдорфтук ультракомпакттуу компактуу эмес мейкиндигинин жашашы жөнүндөгү Сакстын маселеси чечилди. Сакс койгон суроого жооп берүүчү Хаусдорфтук мейкиндиктердин классында ультракомпактуулук жана $\aleph_0$– чектелгендиги эквиваленттүү эместиги далилденди. Регулярдуу мейкиндиктердин классындагы учурунан айырмаланган, көбөйтүндүсү p *– секвенциалдуу мейкиндик болбогон, эки Хаусдорфтук* p *– компакттуу* p *– секвенциалдуу мейкиндиктердин мисалы тургузулду.*

Негизги сөздөр: p *– секвенциалдуу мейкиндиктер,* p *– компактуу мейкиндиктер, ультракомпактуу мейкиндиктер.*

Решена проблема Сакса о существовании сепарабельного хаусдорфова ультракомпактного некомпактного пространства. Доказано, что в классе хаусдорфовых пространств ультракомпактность и $\aleph_0$-ограниченность не эквивалентны, что дает ответ на вопрос Сакса. Построен пример двух Хаусдорфовых р – компактных p *– секвенциальных пространств, чье произведение не является* p *– секвенциальным пространством, в отличие от случая, в классе регулярных пространств.*

***Ключевые слова**:* p *– секвенциальные пространства,* p *– компактные пространства, ультракомпактные пространства.*

Below the Saks problem on the existence of a separable Hausdorff ultracompact noncompact space is solved. $\beta\omega$ *is the Stone-Čech extension of the discrete space of a natural number of numbers* ω. *It is proved that in the class of Hausdorff spaces the ultracompactness and the* $\aleph_0 -$ *boundedness are not equivalent, that gives an answer to the Sack's question. The example of two Hausdorff* p *– compact* p *– sequential spaces whose product is not* p *– sequential space, unlike the case in the class of regular spaces.*

***Key words**:* p *– sequential spaces,* p *– compact space, ultracompact spaces.*

Данная статья содержит решение проблемы Сакса о существовании сепарабельного Хаусдорфова ультракомпактного некомпактного пространства [7].

Пусть $\beta\omega$, как всегда, является Стоун-Чеховским расширением дискретного пространства натурального ряда чисел ω и $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ - его нарост.

Множество $\beta\omega$ мы будем интерпретировать как множество всех ультрафильтров, определенных на ω, причем ω^* в точности состоит из всех нетривиальных ультрафильтров [3]. Напомним некоторые определения из [4]. Топологическое пространство (X,τ) называется $\mathrm{p}-$ компактным, где $\mathrm{p} \in \omega^*$, если для всякой последовательности $\mathrm{p}\in\{x_n : n\in\omega\} \subset X$ найдётся точка x такая, что для произвольной окрестности W точки x множество $\{n : x_n \in W\}$ принадлежит ультрафильтру p. В этом случае говорят, что последовательность $\{n : x_n \in W\}$ обладает $\mathrm{p}-$ предельной точкой x или последовательность $\{n : x_n \in W\}$ $\mathrm{p}-$ сходится к точке x и обозначается следующим образом $x = p\text{-}\lim x_n$.

В работе [7] В.Сакс определяет ультракомпактность следующим образом: топологическое пространство (X,τ) называется ультракомпактным, если для произвольного $\mathrm{p} \in \omega^*$ всякая последовательность обладает $\mathrm{p}-$ предельной точкой и топологическое пространство называется $\aleph_0 -$ограниченным, если замыкание любого счётного множества является компактом. В [7] доказано, что в классе регулярных пространств ультра-компактность эквивалентна $\aleph_0-$ограниченности. Таким образом, из вышеизложенного следует, что сепара-бельное регулярное ультракомпактное пространство является компактом.

В [7] была поставлена проблема: *Существует ли сепарабельное Хаусдорфово ультракомпактное некомпактное пространство?*

Очевидно, если такое пространство найдется, то оно не будет $\aleph_0-$ограниченным и, следовательно, в классе хаусдорфовых пространств ультракомпактность не будет эквивалентна $\aleph_0-$ограниченности

Цель нашей статьи: *Построить пространства, удовлетворяющее вышеназванным свойствам из* [7].

Пусть (X,τ) – топологическое пространство. Следуя А.В.Архангельскому [1], топологию τ на множестве X усилим до топологии счетной тесноты $\tau_{\aleph_0}$ следующим образом: $x\in[A]_{\tau_{\aleph_0}}$, где $A\subset X$ в том и только том случае, когда найдется счетное подмножество $B\subset A$ такое, что $x\in[B]_\tau$ (замыкание берется в тополо-гии τ). Итак, мы построили топологическое пространство $(X,\tau_{\aleph_0})$. Из определения этой топологии следует, что операторы замыканий $[\ ]_\tau$ и $[\ ]_{\tau_{\aleph_0}}$ совпадают на счетных множествах. Таким образом, если исходное топологическое пространство (X,τ) будет сепарабельным со счетным всюду плотным подмножеством $D\subset X$, то сепарабельным также будет $(X,\tau_{\aleph_0})$ и D будет в нем также счетным всюду плотным подмножеством. Следовательно, если в качестве (X,τ) взять сепарабельный компакт несчетной тесноты, то его «счетная» модификация $(X,\tau_{\aleph_0})$, в силу счетности тесноты, будет, естественно, уже некомпактным хаусдорфовым пространством, а так как их топологии совпадают на счетных множествах и всякий компакт является ультракомпактным пространством, то $(X,\tau_{\aleph_0})$ также является ультракомпактным сепарабельным пространством. Суммируя вышеизложенное, мы приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Пусть топологическое пространство (X,τ) является сепарабельным компактом несчетной тесноты. Тогда пространство $(X,\tau_{\aleph_0})$ является Хаусдорфовым сепарабельным ультракомпактным неком-пактным пространством.*

В качестве пространства (X,τ) в теореме 1 можно взять произвольное компактное Хаусдорфово расширение секвенциального пространства Е индекса секвенциальности 2 или пространства X_{FU} [2].

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. *В классе хаусдорфовых пространств ультракомпактность и $\aleph_0-$ограниченность не эквивалентны.*

Используя понятие $\mathrm{p}-$ предельной точки, А.П.Комбаров в работе [4] ввел понятие $\mathrm{p}-$ секвенциального пространства, которое обобщает понятие секвенциального пространства. Напомним, что пространство (X,τ) называется секвенциальным [4], если для всякого незамкнутого множества $M\subset X$ найдется точка $x\in[M]\setminus M$ и последовательность $\{n: x_n\in\omega\}\subset M$ такие, что $x=p\text{-}\lim x_n$.

Определим на произвольном топологическом пространстве (X,τ) топологию τ_{p}, которую мы будем называть $\mathrm{p}-$ *секвенциальным лидером* пространства (X,τ). Подмножество $O\subset X$ принадлежит τ_{p} тогда и только тогда, когда из того, что $x\in O$ и $x=\mathrm{p}\text{-}\lim x_n$ для некоторой последовательности $\{n: x_n\in\omega\}$

следует, что найдется $W \in \mathrm{p}$ так что: $\{n : x_n \in W\} \subset O$. Такие множества мы будем называть $\mathrm{p}-$ *секвенциально открытыми*. Таким образом, элементы топологии τ_{p} суть в точности все $\mathrm{p}-$ секвенциально открытые множества.

Дополнение до $\mathrm{p}-$ секвенциально открытого множества будем называть $\mathrm{p}-$ секвенциально замкнутым множеством. Следовательно, замкнутые множества в (X, τ_{p}) состоят из всех $\mathrm{p}-$ секвенциально замкнутых множеств, которые, как легко видеть, можно описать еще таким образом: подмножество $M \subset X$ называется $\mathrm{p}-$ секвенциально замкнутым, если для всякой последовательности $\{n : x_n \in \omega\} \subset M$ и любой точки x такой, что $x = p\text{-}\lim x_n$ выполнено $x \in M$. Так как всякое открытое множество является $\mathrm{p}-$ секвенциально открытым, то $\tau \subset \tau_{\mathrm{p}}$. Справедлива следующая

Теорема 2. *Топологическое пространство* (X, τ) *является* $\mathrm{p}-$ *секвенциальным пространством.*

Если $M \subset X$ в пространстве (X, τ), то определим $(M)^1$ как множество таких точек x, для которых найдется последовательность $\{x_n : n \in W\} \subset M$ такая, что $x = p\text{-}\lim x_n$, т.е. $(M)^1$ получается путем добавления всех $\mathrm{p}-$ предельных точек для M. Положим $(M)^2 = ((\mathrm{M})^1)^1$ и так далее по индукции можно определить $(M)^{\mathrm{n}}$ для произвольного $n \in \omega$. Теперь предположим, что для всех ординалов γ, меньших чем ординал $\alpha < \omega_1$, мы определили множества $(\mathrm{M})^{\gamma}$. Если α-предельный ординал, то полагаем $(M)^{\alpha} = \cup\{(M)^{\lambda} : \gamma < \alpha\}$, если же α-изолированный ординал, т.е. $\alpha = \alpha_0 + 1$ для некоторого ординала α_0, то положим $(M)^{\alpha} = ((M)^{\alpha_0})^1$. Таким образом, положим $(\mathrm{M})^{\omega_1} = \cup\{(\mathrm{M})^{\alpha} : \alpha < \omega_1\}$. Из свойств ординала ω_1 непосредственно следует $(M)^{\omega_1} = ((M)^{\omega_1})^1$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения

Предложение 1. *Пусть* (X, τ) $\mathrm{p}-$ *компактное топологическое пространство. Тогда* (X, τ_{p}) *является* $\mathrm{p}-$ *секвенциальным* $\mathrm{p}-$ *компактным пространством.*

Предложение 2. *Теснота* (X, τ) $\mathrm{p}-$ *секвенциального пространства счетна.*

Справедливость этого предложения также следует из свойств ординала ω_1 [3].

Известно [4], что произведение $\mathrm{p}-$ компактных пространств в любом числе является $\mathrm{p}-$ компактным.

Теорема [5] (Комбаров А.П). Счетное произведение регулярных $\mathrm{p}-$ компактных $\mathrm{p}-$ секвенциальных пространств снова является компактным $\mathrm{p}-$ секвенциальным пространством. $\mathrm{T}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{p}}$

Естественным образом возникает вопрос: *Насколько существенна регулярность в этой теореме?*

Покажем, что регулярность действительно существенна в этой теореме, а именно построим два Хаусдорфовых $\mathrm{p}-$ компактных $\mathrm{p}-$ секвенциальных пространства $\mathrm{T}_{\aleph_0}^{\mathrm{p}}$ и $\mathrm{T}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{p}}$ такие, что теснота произведения $\mathrm{T}_{\aleph_0}^{\mathrm{p}}$ и $\mathrm{T}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{p}}$ несчётна и, следовательно, в силу предложения 2 это пространство не будет $\mathrm{p}-$ секвенциальным.

Пусть $\mathrm{T}_{\aleph_0}^{\mathrm{p}}$ ($\mathrm{T}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{p}}$) получается из дизъюнктной счётной (континуальной) топологической суммы пространств, каждое из которых гомеоморфно пространству $\{O\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \omega\right\} \subset M$ в естественной топологии и склеенных в предельных точках в одну. Таким образом, мы получили так называемые, счетный и континуальный веера Фреше-Урысона, которые также являются $\mathrm{p}-$ секвенциальными пространствами.

Как показано в [2], произвольное компактное расширение $T_{\aleph_0}$ (T_c) имеет несчетную тесноту, а также и само произведение $T_{\aleph_0} \times T_c$ имеет несчетную тесноту. Пусть теперь $bT_{\aleph_0}$ и bT_c - произвольные компактные расширения пространств $T_{\aleph_0}$ и T_c соответственно, а $T^p_{\aleph_0}$ и T^p_c - их $p-$ секвенциальные лидеры. Пространства $T_{\aleph_0}$ и T_c являются подпространствами пространств $T^p_{\aleph_0}$ и T^p_c соответственно и, следовательно, теснота пространства $T^p_{\aleph_0} \times T^p_c$ несчетна, т.е. это автоматически приводит к тому, что $T^p_{\aleph_0} \times T^p_c$ не является $p-$ секвенциальным, хотя каждый из сомножителей, в силу предложения 1, является $p-$ компактным $p-$ секвенциальным пространством.

Итак, мы пришли к следующему результату:

Теорема 3. *Существуют два хаусдорфовых* $p-$ *компактных* $p-$ *секвенциальных пространств, чье произведение не является* $p-$ *секвенциальным пространством.*

И как следствие мы получаем тот факт, что требование регулярности в упомянутой теореме А.П.Комбарова существенно.

Литература:

1. Архангельский А.В. О бикомпактах, которые удовлетворяют условию Суслина наследственно. Теснота и свободные последовательности // ДАН СССР. - Москва, 1971. - С. 1227-1230
2. Архангельский А.В. Спектр частот топологического пространства и операция произведения // Труды Моск. матем. общества, №40. - Москва, 1979. - С. 171-206.
3. Архангельский А.В., Пономарёв В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - Москва: «Наука», 1974.
4. Комбаров А.П. Об одной теореме Стоуна // ДАН СССР. - Москва, 1983. - Т.270. - №1. - С. 37-40.
5. Комбаров А.П. О компактности и секвенциальности по множеству ультрафильтров. // Вестник МГУ, сер. матем., мех. - Москва, 1985. - №5. - С. 15-18.
6. Bernstein A.R. A new kind of compactness for topological spaces // Fund. Math. 1970. - V.66. - P. 185-193.
7. V.Saks. Ultrafilters invariant in topological spaces // Trans. Amer. Math.Soc. - 1978.-V.241. - P. 79-97.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Нуракунов А.М.