

*Курманов У.Э.*

## ТОВАРЛАРДЫ ЖАНА КЫЗМАТ КӨРСӨТҮҮЛӨРДҮ ӨНДҮРҮҮДӨ ОПТИМАЛДАШТЫРЫП МОДЕЛДЕШТИРҮҮНҮН НЕГИЗДЕРИ

*Курманов У.Э.*

## ОСНОВЫ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ ТОВАРОВ И УСЛУГ

*U.E. Kurmanov*

## FUNDAMENTALS OF OPTIMIZATION MODELING IN PRODUCTION GOODS AND SERVICES

УДК: 626.62.014

Макалада жөнөкөй мисалдардын негизинде ар дайым эле ачык боло бербеген экономикалык-өндүрүштүк теориянын кээ бир принципалдуу эрежелерин аныктоого мүмкүн болгон эн жөнөкөй маселелерди кароо келтирилген. Экономикалык-математикалык моделдөөнүн артыкчылыктары дааналап каралган. Ишкананын ишмердүүлүгүнүн экономикалык-математикалык моделин түзүү аркасында кирешени жогорулатуунун негиздери. Моделдер чыгымы жок эксперимент жүргүзүүгө мүмкүндүк берет. Ресурстардын чыгымдарын өзгөртүүчү жаны технологиялардын пайда болушу менен оптималдуу пландын өзгөрүшү, жаны технологияларды жайылтууда буюмдардын өндүрүлүшүнө жана чыгымдарына же продукцияга баанын өзгөрүшүнө таасир этүүчү принципалдуу өндүрүштүк маселелер кандай өзгөрүүсү сыяктуу көптөгөн өндүрүштүк суроолорду тез жана ишенимдүү жооп алууга болот. Дагы бирден-бир принципалдуу жыйынтыгы болуп, ар түрдүү критерийлер боюнча өндүрүштүк маселелерди оптималдаштырууга болоору эсептелет. Ошону менен бирге башка критерий да колдонулат – бул нарктын (чыгымдын) минимуму. Албетте, бул учурда чектөөлөр координаттын башталышынан баштап кээ бир бөлүмдөрдө жайгашышкан мүмкүн болгон чечимдердин көп бурчтук түрүнө ээ болушат.

**Негизги сөздөр:** экономика-математикалык моделдер, өз наркы, киреше, өндүрүш, ресурстар, функция, координаталар.

В статье приводятся рассмотрение самых простейших моделей позволяющих уяснить некоторые принципиальные положения экономико-производственной теории, которые не всегда очевидны, на основе простейших примеров. Наглядно рассмотрены преимущества экономико-математического моделирования. Основы максимизации прибыли за счет построения экономико-математического моделирования деятельности предприятия. Модели позволяют экспериментировать практически без затрат. Быстро и надежно получить ответы на такие многие производственные вопросы, как изменение оптимального плана при появлении новой технологии, которые изменяют затраты ресурсов, как изменятся принципиальные производственные вопросы при внедрении новых технологий, которые соответственно влияют на затраты и выпуск единицы изделия или при изменении цен на продукцию. Также одним из принципиальных выводов является, что можно оптимизировать производственные задачи по различным критериям.

В нашем случае это извлечение максимальной прибыли. При этом используется и другой критерий – это минимум себестоимости (затрат). Разумеется, в этом случае ограничения имеют другой вид – многоугольника допустимых решений располагающихся на некотором отдалении от начало координат.

**Ключевые слова:** экономико-математические модели, себестоимость, прибыль, производство, ресурсы, функция, координаты.

The article deals with the simplest models allowing to understand some of the fundamental provisions of the economic-production theory, which are not always obvious, on the basis of the simplest examples. The advantages of economic and mathematical modeling are clearly considered. Fundamentals of profit maximization through the construction of economic and mathematical modeling of the enterprise. Models allow you to experiment with almost no cost. Quickly and reliably receive answers to many production questions, such as changing the optimal plan with the advent of new technology, which change the cost of resources, how to change the fundamental production issues with the introduction of new technologies, which respectively affect the cost and output of a unit of product or changes in product prices. Also, one of the main conclusions is that it is possible to optimize production tasks according to various criteria. In our case, it is the extraction of maximum profit. At the same time, another criterion is used – it is the minimum cost price (cost). Of course, in this case, the constraints have a different form – a polygon of acceptable solutions located at some distance from the origin.

**Key word:** economic and mathematical models, cost, profit, production, resources, function, coordinates.

Оптимизационные модели позволяют в основном ответить на вопросы, что производить и из чего производить? Здесь мы не ставим задачу научить человека конструировать модели или решать соответствующие экономико-математические задачи. Проблема в том, что рассмотрение самых простейших моделей позволяют уяснить некоторые принципиальные положения экономико-производственной теории, которые не всегда очевидны. Приведем простейший пример. Например, предприятие планирует выпускать два изделия. Обозначим неизвестное количество выпускаемых первых изделий через  $x_1$ , а неизвестное количество вторых изделий  $x_2$ . Пусть на производство

указанных изделий расходуются три ресурса. Ими могут служить, рабочая сила, материалы, время работы станков и т.п. Обозначим через  $a_{11}$  количество 1-го ресурса, которое необходимо израсходовать для выпуска одного первого изделия, а через  $a_{12}$  - количество первого ресурса, нужное для выпуска второго изделия. Аналогично для выпуска одного первого изделия нужно  $a_{21}$  второго ресурса  $a_{31}$  - и третьего, а для одного второго изделия нужно  $a_{22}$  второго ресурса и  $a_{32}$  третьего. Тогда общее количество первого изделия, будет равна  $a_{11}X_1$ , а на выпуск всех вторых изделий.  $a_{12}X_2$ . Пусть предприятию фиксирован объем первого ресурса, которым обозначим через  $b_1$ . Поскольку этот объем не может быть превышен, то получим  $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1$  аналогично, для двух других ресурсов получим  $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \leq b_2$   $a_{31}X_1 + a_{32}X_2 \leq b_3$ , где  $b_2, b_3$  - объемы выделенных предприятию второго и третьего ресурсов. Полученные неравенства можно представить графически. Отложим по оси абсцисс количество первого продукта  $X_1$ , по оси ординат - количество второго продукта  $X_2$ .

В этих координатах выражение  $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1$  есть уравнение прямой обозначенной на рисунке 1 цифрой (1). Аналогично, равенства  $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \leq b_2$  и  $a_{31}X_1 + a_{32}X_2 \leq b_3$  дадут прямые, обозначенные цифрами (2) (3). Поскольку у нас ограничения заданы не в виде равенства а в виде неравенства то точки, удовлетворяющие всем трем неравенствам должны лежать внутри многоугольника, ограниченного указанными прямыми и осями координат.

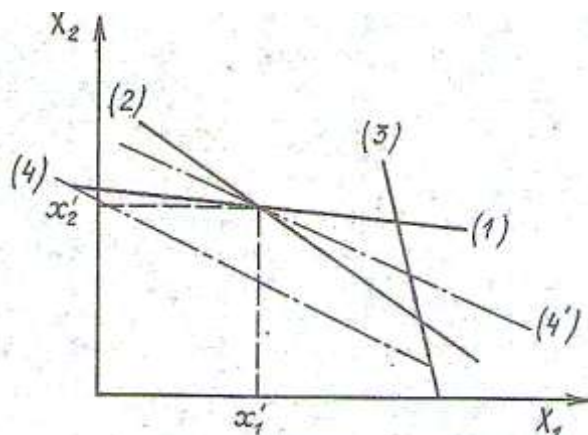


Рис. 1. Графический метод оптимизации.

Каждая точка внутри этого многоугольника, который называется многоугольником допустимых решений, соответствует некоторому плану предприятия, который может быть осуществлен с точки зрения наличных ресурсов. Такой план называется допустимым. Координаты каждой точки внутри многоугольника дадут соответственно количество первого продукта и количество второго продукта, производимое в соответствии с этим планом. Очевидно, что число

допустимых планов с различными вариантами значений  $X_1$  и  $X_2$  будут бесконечно, либо число точек внутри многоугольника бесконечно. Чтобы среди всех этих точек-планов выбрать один наилучший, надо дополнительно задать как называемый критерий оптимальности. Например, в качестве такого критерия можно поставить достижение максимума прибыли. Пусть  $c_1$  - прибыль получаемая предприятием за единицу первой продукции,  $c_2$  прибыль за единицу второй продукции. Тогда  $c_1 X_1$  - есть прибыль, которую предприятие получит за всю первую продукцию, произведенную в соответствии с некоторым планом, а  $c_2 X_2$  - прибыль за всю вторую продукцию. Сумма  $c_1 X_1 + c_2 X_2$  есть вся прибыль, получаемая предприятием за всю продукцию. Мы хотим максимизировать эту прибыль, что записывается.

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 \rightarrow \max$$

Посмотрим, как можно получить план с максимальной прибылью. Приравняем выражение  $c_1 X_1 + c_2 X_2$  некоторому произвольному числу  $P$ , то есть

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 = P$$

Этому выражению на рисунке соответствует прямая линия 4. Будем увеличивать число  $P$ , то есть увеличивать прибыль. При этом прямая (4) будет перемещаться на рисунке 1 вправо - вверх параллельно самой себе. Точки на этой прямой соответствуют некоторому плану. Очевидно, что максимальная прибыль будет получена при наибольшем удалении прямой (4) от начала координат. Однако, чтобы удовлетворять ограничениям по ресурсам, эта прямая должна хотя бы одной точкой принадлежать многоугольнику допустимых решений. Поэтому прямая (4) двигается вправо - вверх до тех пор, пока она не коснется хотя бы одной вершины этого многоугольника (на рис.1 прямая 4). Эта вершина (с соответствующими координатами  $X_1^*$ ,  $X_2^*$ ) и будет оптимальным планом, ибо она находится в многоугольнике допустимых решений и, следовательно, при выпуске продукции первого вида в объеме и второго в объеме  $X_2^*$  имеющихся ресурсы не будут превышены. Вместе с тем, поскольку эта вершина находится на прямой (4), максимально удаленной от начала координат, то продукция, произведенная соответственно в объемах  $X_1^*$  и  $X_2^*$  дает максимально возможную прибыль.

Разумеется, приведенный выше пример оптимального решения не годится для практических задач, где число переменных и ограничений исчисляются сотнями. Для практических задач служат другие методы. Однако рассмотренный выше простой пример позволяет сделать несколько выводов, понимание которых крайне возможно для хозяйственного руководителя любого ранга.

Прежде всего наглядно видны преимущества экономико-математического моделирования. Записанные выше три неравенства и уравнения (называемые целевой функцией) максимизация прибыли и составляют экономико-математическую модель деятельности предприятия. Эта модель позволяет экспериментировать практически без затрат. Например, быстро и надежно можно получить ответы на такие вопросы: как изменится оптимальный план при появлении новой технологии, изменяющий затраты ресурсов, как изменится план при появлении новой технологии, изменяющей затраты ресурсов на выпуск единицы изделия или при изменении цен на продукцию (напомним, что мы говорим о “продукции” только как об условном примере. Все наши рассуждения справедливы и для эксплуатационного предприятия, “производящего” услуги). Второй важный вывод – оптимизировать можно лишь по одному критерию. В нашем примере это был максимум прибыли. Часто используется другой критерий – минимум себестоимости (затрат). В этом случае прямую целевой функции для получения оптимума двигать не вправо - вверх, а влево - вниз, поскольку нам нужен минимум. Разумеется, в этом случае ограничения имеют другой вид – многоугольник допустимых решений располагается на некотором отдалении от начала координат. Но никак нельзя одновременно требовать максимума результата (например, прибыли) при минимуме затрат, поскольку в этом случае прямую целевой функции нужно одновременно двигать вправо - вверх, влево-вниз. Действительно, минимум затрат в пределе равен нулю, когда мы ничего не производим. Ясно, что стремясь к минимуму затрат, мы никак не получим максимума продукции и, следовательно, прибыли.

Правильная постановка задачи может иметь лишь два варианта:

1) получение максимума результат при заданных затратах ресурсов;

2) получение минимума затрат ресурсов при обеспечении заданного планового задания по выпуску продукции.

Чтобы понять третий вывод, вернемся к рисунку 1 точка оптимального плана в нашем случае лежит на пересечении прямых (1) и (3). Это означает, что соответствующие этим прямым ресурсы будут использованы полностью: затраты ресурсов в точности равны выделенным объемам, то есть соответствующие неравенства заменяются на равенства. Вместе с этим эта точка лежит левее прямой (2). Это означает, что второй ресурс будет израсходован не полностью. Это очень важный вывод: при получении оптимального плана некоторые ресурсы всегда остаются. Нельзя требовать, чтобы все ресурсы использовались полностью. Экономический смысл этого утверждения следующий. Ресурсы обладают разной степенью дефицитности. Один из них (наиболее дефицитные) и определяют оптимальный план, а другие при этом остаются в некотором избытке. Требование обязательного использования всех ресурсов приводит к неоптимальному плану. Из других, менее важных выводов, можно указать на следующие:

- Разные целевые функции дают различные оптимальные планы, поэтому к выбору критерия нужно подходить очень ответственно;

- Всякие дополнительные ограничения может только ухудшить оптимальный план.

Действительно, всякое новое ограничение, т.е. дополнительная прямая на рисунке 1, может только уменьшить многоугольник допустимых решений, и следовательно, новое оптимальное решение может находиться только левее и ниже старого. Что соответствует меньшей прибыли. Думается, что понимание этого положения не составит затруднений. Любому хозяйственному руководителю ясно, что чем меньше ограничений, тем больше возможностей достижения лучшего результата.

#### Литература:

1. Краснощеков П.С. Принципы построения моделей / П.С.Краснощеков, А.А. Петров. - М.: Изд-во МГУ, 1983.
2. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук Курманова У.Э.
3. Миротин Л.Б., Ташбаев Ы.Э. Логистика для предпринимателя. - Инфра-М. - Москва, 2002.

Рецензент: д.т.н., доцент Советбеков Б.С.