МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Усенов И.А., Кенжебаев М.К.

ГАММЕРШТЕЙНДИН БИРИНЧИ ТЕКТЕГИ ОПЕРАТОРДУК ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫ ҮЧҮН КАЛЫПТАНДЫРУУЧУ ОПЕРАТОР

Усенов И.А., Кенжебаев М.К.

РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ ОПЕРАТОР ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ГАММЕРШТЕЙНА ПЕРВОГО РОДА

I.A. Usenov, M.K. Kenzhebaev

REGULATORY OPERATOR FOR THE SOLUTION OF THE OPERATOR EQUATION OF THE FIRST GAMMERSHTELINE

УДК: 519.683.5

Илимдин жана техниканын көптөгөн маселелери корректүү эмес коюлган маселелер болуп эсептелинет. Геофизиканын көп тескери маселелеринде корректүү эмес маселелер кездешет, ошону менен бирдикте физиканын көптөгөн колдонмо маселелери биринчи тектеги операторлук теңдемеге алынып келинет. Изделип жаткан чыгарылышка карата алдын ала аныкталган чектүү шарттардын негизинде корректүү эмес маселелерди чыгаруу үчүн атайын түрдө иштелип чыккан регуляризация алогритмдерин колдонуу керек. Биринчи тектеги сызыктуу эмес оператордук теңдеменин классы Гильберт мейкиндигинде изилденген. Берилген теңдеменин так чыгарылышына жакындаштырылган чыгарылыштын жыйналуучулугу далилденген. Калыптандыруучу параметирдин кетирилген каталардан көз карандылыгы табылып, баштапкы берилиштерден турумдуу болгон жакындаштырылган чыгарылыш тургузулду.

Негизги сөздөр: *Гаммерштейндин теңдемеси, калыптандыруу, жыйналуучулук, биринчи тектеги теңдеме, Гильберт мейкиндиги, тескери маселе.*

Многие обратные задачи науки и техники являются некорректно поставленными. Некорректно поставленные задачи часто встречаются при рассмотрении обратных задач геофизики, а также многие прикладные задачи физики сводятся к операторным уравнениям первого рода. Для решения некорректно поставленных задач необходимо применять специально разработанные регуляризирующие алгоритмы при различных априорных ограничениях на искомое решение. В данной работе в гильбертовом пространстве исследован класс нелинейных операторных уравнений первого рода, когда приближенно задан линейный оператор и правая часть уравнения. Построено решение регуляризированного уравнения. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению исходного уравнения по норме пространства Гильберта. Произведен выбор зависимости параметра регуляризации от погрешностей исходных данных и получено устойчивое решение относительно исходных данных задач.

Ключевые слова*: уравнение Гаммерштейна, регуляризация, сходимость, уравнение первого рода, пространство гильберта, обратные задачи.*

Many inverse problems of science and technology are incorrectly stated. Incorrectly posed problems are often encountered when considering inverse problems of geophysics, and also many applied problems of physics are reduced to operator equations of the first kind. To solve incorrectly posed problems, it is necessary to apply specially developed regularizing algorithms with different a priori constraints on the desired solution. In this paper, a class of nonlinear operator equations of the first kind is investigated in a Hilbert space, when the linear operator and the right side of the equation are approximately given. The solution of the regularized equation is constructed. The convergence of the approximate solution to the exact solution of the original equation in the norm of the Hilbert space is proved. The choice of the dependence of the regularization parameter on the errors of the initial data was made and a stable solution was obtained with respect to the initial data of the problems.

Key words*: Hammerstein equation, regularization, convergence, equation of the first kind, Hilbert space, inverse problems.*

Для регуляризации решения нелинейного операторного уравнения в Гильбертовом пространстве посвящены работы авторов [1], [2], [3], [5].

Ранее авторами построены регуляризирующие операторы для решения операторного уравнения первого рода Гаммерштейна, когда точно и приближенно задан линейный оператор.

В случае, когда линейный оператор является самосопряженным, положительным операторное уравнение Гаммерштейна первого рода исследовано в работе [4].

Постановка задач:

В данной работе исследовано операторное уравнение первого рода Гаммерштейна

$$AF(z)=u \quad , \qquad (1)$$

когда приближенно задан линейный оператор, т.е. вместо оператора A известно его приближенное значение A_h такое, что

$$\|A_h - A\| \le h , \qquad (2)$$

где $A: H \to H$ - линейный положительный оператор, F- нелинейный оператор, дифференцируемый по Фреше.

Через A^* обозначим оператор, сопряженный с оператором A. Таким образом, оператор $B = A^* A$ является самосопряженным, положительным оператором.

Для оператора B, при условие $\|A^*\| \le M$, имеет место оценка

$$\|B_h - B\| \le Mh \qquad (2^*)$$

Рассмотрим операторное уравнение первого рода вида

$$BF(z) = A^* u . \qquad (1^*)$$

Уравнения (1) и (1*) являются эквивалентными.

Допустим, что при $u = u_0$ уравнение (1) имеет точное решение z_0, т.е.

$$BF(z_0) = A^* u_0 \qquad (3)$$

и истокообразно представимо

$$z_0 = \sigma B \vartheta_0 , \text{ где } \sigma > 0, \sigma \in R , \ \vartheta_0 \in H . \qquad (4)$$

1. Регуляризация

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\alpha z_{\alpha,h} + B_h F\left(z_{\alpha,h}\right) = A_h^* u \ , \text{ где } \alpha > 0 \qquad (5)$$

Пусть $F(z) = K(z) + \sigma z$, где К – нелинейный оператор. (6)

В [4] относительно нелинейного оператора K доказано, что для любого $z_1, z_2 \in H$ удовлетворяет условию Липшица, т.е. $\|K(z_1) - K(z_2)\| \le N \|z_1 - z_2\|, \quad N < \sigma$, (7)

где $\lambda_i < a \le b < \lambda_{i+1}, \ i = 1, 2, \dots \ a \le F'(z) \le b$, $\sigma = \dfrac{a+b}{2}$ где $\|K'(z)\| \le \dfrac{b-a}{2} \equiv N > 0$,

а также доказана обобщенная лемма Лаврентьева М.М., что при любом α>0 и σ >0 имеет место неравенство

$$\left\|(\alpha E+\sigma B)^{-1}\right\| \le \alpha^{-1}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что оператор $(\alpha E+\sigma A^*A)^{-1}A^*A$ удовлетворяет неравенству

$$\left\|(\alpha E+\sigma B)^{-1}B\right\| \le \sigma^{-1}. \tag{9}$$

В силу представления (6) из уравнения (5), имеем

$$\alpha z+\sigma B_h z+B_h K(z)=A_h^* u. \tag{10}$$

Оператор $\alpha E+\sigma B_h$ представим в виде

$$\alpha E+\sigma B_h=(\alpha E+\sigma B)+(\sigma B_h-\sigma B)=(\alpha E+\sigma B)\Big(E+(\alpha E+\sigma B)^{-1}\sigma(B_h-B)\Big).$$

Используя оценки (2) и (8) оценим норму оператора $(\alpha E+\sigma B)^{-1}\sigma(B_h-B)$

$$\left\|(\alpha E+\sigma B)^{-1}\sigma(B_h-B)\right\| \le \sigma Mh\alpha^{-1}=P(\sigma,M)\gamma(\alpha,h). \tag{11}$$

Пусть имеет место предельное соотношение

$$\lim_{h\to 0}\gamma(\alpha,h)=0. \tag{12}$$

Из условия (12) следует, что существует число $h_0>0$, такое, что

$$q_1=P(\sigma,M)\gamma(\alpha,h)<1, \text{при } h<h_0. \tag{13}$$

При выборе $\gamma(\alpha,h)=h^{1-\beta},\ 0<\beta<1$, условие (12) выполняется, и $h_0=P_1(\sigma,M,\beta)>0$.

Тогда в силу теоремы Банаха оператор $E+(\alpha E+\sigma B)^{-1}\sigma(B_h-B)$ имеет обратный оператор, причем справедлива оценка

$$\left\|\Big(E+(\alpha E+\sigma B)^{-1}\sigma(B_h-B)\Big)^{-1}\right\| \le (1-q_1)^{-1}=Q(q_1). \tag{14}$$

Таким образом, оператор $\alpha E+\sigma B_h$ имеет обратный оператор, и этот оператор представим в виде

$$L_{\alpha,h}=(\alpha E+\sigma B_h)^{-1}=\Big(E+(\alpha E+\sigma B)^{-1}\sigma(B_h-B)\Big)^{-1}(\alpha E+\sigma B)^{-1}. \tag{15}$$

Из (15), используя неравенства (8) и (14) получаем

$$\left\|(\alpha E+\sigma B_h)^{-1}\right\| \le (1-q_1)^{-1}\alpha^{-1}=Q(\alpha,q_1). \tag{16}$$

Тогда из уравнения (10) переходим к уравнению

$$z_{\alpha,h}=L_{\alpha,h}A_h^*u-L_{\alpha,h}B_hK\left(z_{\alpha,h}\right). \tag{17}$$

Введем обозначение

$$T_{\alpha,h}\left(z_{\alpha,h}\right)=L_{\alpha,h}B_hK\left(z_{\alpha,h}\right). \tag{18}$$

Норма оператора $(\alpha E+\sigma B_h)^{-1}B_h$ удовлетворяет оценке

$$\left\|(\alpha E+\sigma B_h)^{-1}B_h\right\| \le (1-q_1)^{-1}\left(Mh\alpha^{-1}+\sigma^{-1}\right)=P_1(\alpha,h,q_1,\sigma,M). \tag{19}$$

Оценим норму оператора $T_{\alpha,h}(z)$

$$\|T_{\alpha,h}(z_1)-T_{\alpha,h}(z_2)\|=\|L_{\alpha,h}B_h(K(z_1)-K(z_2))\| \tag{20}$$

Тогда из (20) используя оценки (7) , (19), имеем

$$\|T_{\alpha,h}(z_1)-T_{\alpha,h}(z_2)\|\le\|L_{\alpha,h}B_h\|\|K(z_1)-K(z_2)\|\le P_1(\alpha,h,q_1,\sigma,M)N\|z_1-z_2\| \ . \tag{21}$$

Из условия (12) следует, что существует число $\tilde{h}_0>0,$ такое, что

$$q_2=P_1(\alpha,h,q_1,\sigma,M)N<1 \ . \quad \text{при} \quad h<\tilde{h}_0=P_2(\sigma,M,\beta,N)>0 \ . \tag{22}$$

Таким образом, оператор $T_{\alpha,h}(z)$ является оператором сжатия.

Уравнение (17) решаем методом последовательных приближений. За нулевые приближения возьмем элемент

$$\tilde{z}_0=L_{\alpha,h}A_h^*u \tag{23}$$

Остальные приближения определяются по формуле

$$z_{k+1}=\tilde{z}_0+L_{\alpha,h}B_hK(z_k) \qquad k=0,1,2,\ldots \tag{24}$$

Покажем, что последовательность $\{z_\kappa\}_{\kappa=0}^{\infty}$ является сходящейся.

Сходимость последовательности $\{z_\kappa\}_{\kappa=0}^{\infty}$ и функционального ряда вида

$$\tilde{z}_0+[z_1-\tilde{z}_0]+[z_2-z_1]+\ldots+[z_k-z_{k-1}]+\ldots \tag{25}$$

эквивалентны.

Нулевое приближение $\tilde{z}_0$ при условии $\|A_h^*\|\le M_1$ удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{z}_0\|\le Q(\alpha,q_1)M_1\|u\|. \tag{26}$$

Полагая $k=0$, из (24), имеем

$$\|z_1-\tilde{z}_0\|=\|L_{\alpha,h}B_hK(\tilde{z}_0)\|\le\|L_{\alpha,h}B_h(K(\tilde{z}_0)-K(0))\|+\|L_{\alpha,h}B_hK(0)\|\le q_2\|\tilde{z}_0\|+N^{-1}\|K(0)\|.. \tag{27}$$

Полагая в (24) $k=1$ и $k=0$, вычитая из первого второе, получаем

$$\|z_2-z_1\|\le\|L_{\alpha,h}B_h(K(z_1)-K(\tilde{z}_0))\|\le q_2\|z_1-\tilde{z}_0\|\le q_2^2\left(\|\tilde{z}_0\|+N^{-1}\|K(0)\|\right). \tag{28}$$

Далее по методу математической индукции можно доказать, что для любого натурального $k\ge2$, справедливо неравенство

$$\|z_k-z_{k-1}\|\le q_2^k\left(\|\tilde{z}_0\|+N^{-1}\|K(0)\|\right) \ . \tag{29}$$

Таким образом, ряд (25) мажорируется следующим числовым рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}q_2^k\left(\|\tilde{z}_0\|+N^{-1}\|K(0)\|\right)\cdot \tag{30}$$

Следовательно, условие $q_2<1$ при $h<\tilde{h}_0$ обеспечивает сходимость ряда (30), тогда, ряд (25) также является сходящимся. Сумму ряда (25) обозначим через $z_{\alpha,h}$. В силу эквивалентности сходимости последовательности $\{z_\kappa\}_{\kappa=0}^{\infty}$ и ряда (25) имеем

$$\lim_{k\to\infty} z_k = z_{\alpha,h} \tag{32}$$

Используя непрерывность оператора $L_{\alpha,h}B_hK$, при $k\to\infty$, переходим к пределу в (24) и используя предельное соотношение (33), получим

$$z_{\alpha,h} = \tilde{z}_0 + L_{\alpha,h}B_hK\left(z_{\alpha,h}\right) \tag{34}$$

Таким образом, доказано.

ТЕОРЕМА 1. Пусть: 1. задан оператор B_h, удовлетворяющий неравенству (2*), 2**.** имеет место предельное соотношение (12). Тогда уравнение (17) при любом $u\in H$, $\alpha>0, \sigma>0$ и $h<\tilde{h}_0$ имеет единственное решение $z_{\alpha,h}\in H$.

Если решение уравнения (17) при $u=u_0$ обозначить через $z^0_{\alpha,h}$, тогда в силу формулы (34) оно представимо в виде

$$z^0_{\alpha,h} = L_{\alpha,h}A^*_hu_0 - L_{\alpha,h}B_hK\left(z^0_{\alpha,h}\right). \tag{35}$$

Рассмотрим разность $z^0_{\alpha,h} - z_0$

$$z^0_{\alpha,h} - z_0 = L_{\alpha,h}A^*_hu_0 - L_{\alpha,h}B_hK\left(z^0_{\alpha,h}\right) - z_0. \tag{36}$$

Полагая, что $A^*u_0 = \sigma Bz_0 + BK\left(z_0\right)$, переходим в норму разности $z^0_{\alpha,h} - z_0$

$$\begin{gathered}\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\| \le \left\|L_{\alpha,h}\left(\sigma Bz_0 - \alpha z_0 - \sigma B_hz_0\right)\right\| + \left\|L_{\alpha,h}B_h\left(K\left(z^0_{\alpha,h}\right) - K\left(z_0\right)\right)\right\| + \\ + \left\|L_{\alpha,h}\left(B_h - B\right)\left(K\left(z_0\right) - K\left(0\right)\right)\right\| + \left\|L_{\alpha,h}\left(B_h - B\right)K\left(0\right)\right\|.\end{gathered} \tag{37}$$

Используя (4) из (38) имеем

$$\begin{gathered}\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\| \le \alpha\left(\sigma P_1\left(\alpha,h,q_1,\sigma,M\right) + q_1Q\left(q_1\right)\right)\left\|v_0\right\| + h\alpha^{-1}Q\left(q_1\right)Q_1 + \\ + q_2\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\| \le \alpha\left(\sigma N^{-1} + Q\left(q_1\right)\right)\left\|v_0\right\| + h\alpha^{-1}Q\left(q_1\right)Q_1 + q_2\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\|,\end{gathered} \tag{38}$$

где $Q_1 = \sigma M\left\|v_0\right\|\left(\sigma + N\right) + \left\|K(0)\right\|$.

В силу условия (22) из (38) имеем оценку

$$\left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\| \le \alpha c_1 + h\alpha^{-1}c_2, \tag{39}$$

где $c_1 = c_3\left(N^{-1} + Q\left(q_1\right)\right)\left\|v_0\right\|$, $c_2 = c_3Q\left(q_1\right)Q_1$, $c_3 = \left(1-q_2\right)^{-1}$. (40)

Минимизируя правую часть (39), имеем

$$\alpha(h) = \sqrt{c_2c_1^{-1}h} \tag{41}$$

Подставляем (41) в правую часть (39) имеем

$$\left\|z^\delta_{\alpha,h} - z_0\right\| \le 2\sqrt{c_1c_2}\sqrt{h} \quad . \tag{42}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть: 1. Выполнены все условия теоремы 1; 2, при $u=u_0$ уравнение (1) имеет точное решение, представимое в виде (4); 3. зависимость параметра регуляризации от погрешности линейного оператора определяется по формуле (41). Тогда решение $z^0_{\alpha,h}$ уравнения (17) при $h \to 0$ сходится к точному решению уравнения (1), скорость сходимости удовлетворяет условию (42).

Пусть правая часть уравнения (1) задана с погрешностью δ, т.е.

$$\|u_\delta - u_0\| \le \delta \tag{43}$$

Решение уравнения (17) при $u = u_\delta$ обозначим через $z^\delta_{\alpha,h}$. Тогда в силу формулы (34) решение $z^\delta_{\alpha,h}$ представимо в виде

$$z^\delta_{\alpha,h} = L_{\alpha,h} A^*_h u_\delta + L_{\alpha,h} B_h K\left(z^\delta_{\alpha,h}\right). \tag{44}$$

Оценим разность, $z^\delta_{\alpha,h} - z_0$. Используя, неравенство треугольника имеем

$$\left\|z^\delta_{\alpha,h} - z_0\right\| \le \left\|z^\delta_{\alpha,h} - z^0_{\alpha,h}\right\| + \left\|z^0_{\alpha,h} - z_0\right\|. \tag{45}$$

Второе слагаемое в (45) удовлетворяет оценке (39), оценим первое слагаемое

$$\left\|z^\delta_{\alpha,h} - z^0_{\alpha,h}\right\| \le \left\|L_{\alpha,h} A^*_h (u_\delta - u_0\right\| + \left\|L_{\alpha,h} B_h\right\| \left\|K\left(z^\delta_{\alpha,h}\right) - K\left(z^0_{\alpha,h}\right)\right\| \le M_1 \delta\alpha^{-1} + q_2 \left\|z^\delta_{\alpha,h} - z^0_{\alpha,h}\right\|. \tag{46}$$

Отсюда в силу (12) имеем

$$\left\|z^\delta_{\alpha,h} - z^0_{\alpha,h}\right\| \le c_4 \delta\alpha^{-1}, \quad c_4 = c_3 M_1. \tag{47}$$

Тогда из (45) имеем оценку

$$\left\|z^\delta_{\alpha,h} - z_0\right\| \le \alpha c_1 + h\alpha^{-1} c_2 + c_4 \delta\alpha^{-1}. \tag{48}$$

Минимизируя правую часть (48), имеем

$$\alpha(\delta, h) = \sqrt{(c_4\delta + hc_2) c_1^{-1}} \tag{49}$$

Подставляем (49) в правую часть (48) имеем

$$\left\|z^\delta_{\alpha,h} - z_0\right\| \le 2\sqrt{c_1}\sqrt{c_4\delta + hc_2}. \tag{50}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть: 1. выполнены все условия теоремы 3; 2. элемент u_δ удовлетворяет неравенству (43); 3. Зависимость параметра регуляризации от погрешностей определяется по формуле (49). Тогда решение уравнения (17) при $\delta, h \to 0$ является приближенным решением уравнения (1). Скорость сходимости удовлетворяет условию (50).

Литература:

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. - Новосибирск, 1962. - 96 с.
2. Саадабаев А. Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений 1-го рода. - Бишкек, 1997. - 218 с.
3. Усенов И.А. Построение регуляризирующих операторов для решения нелинейных операторных уравнений / Диссертация кандидата наук. - Бишкек, 1999. -108 с.
4. Усенов И.А. Регуляризация решения операторного уравнения Гаммерштейна первого рода / Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям. - Выпуск №41. - Бишкек: «Илим», 2009. - С. 63-67.
5. Усенов И.А. Построение приближенного решения нелинейного операторного уравнения первого рода в Гильбертовом пространстве / Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. - №1. - С.8-14. DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-08-14.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Токтосунов М.Б.