***МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ***

***МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ***

***MATHEMATICAL SCIENCES***

*Асанов А., Ашырбаев У.Р.*

# ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕНИН ОҢ ЖАГЫН АНЫКТОО МАСЕЛЕСИ

*Асанов А., Ашырбаев У.Р.*

# ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

*A. Asanov, U.R. Ashyrbaev*

# THE PROBLEM OF DETERMINING THE RIGHT PART OF A LINEAR DIFFERENTIAL PSEUDO-PARABOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER

*УДК: 517.95*

*Бул иште төртүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеменин оң жагын аныктоо тескери маселеси изилденген. Тескери маселе теңдемедеги убакыттан көз каранды болгон белгисиз функцияларды ички чекиттердеги кошумча шарт боюнча аныктоо маселесинен турат. Каралган тескери маселе үчүн анын чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теорема далилденет.*

***Негизги сөздөр:*** *тескери маселе, псевдопараболалык теңдеме, кошумча шарт, Вольтеррдин интегралдык тендемелер системасы.*

*В работе исследована обратная задача определения правой части в псевдопараболическом уравнении четвертого порядка. Обратная задача состоит в определении неизвестных правых частей зависящих от времени по переопределению во внутренних точках. Доказывается теорема существования и единственности решения рассматриваемой обратной задачи.*

***Ключевые слова:*** *обратная задача, псевдопараболическое уравнение, условия переопределения, система интегральных уравнений Вольтерра.*

*The inverse problem of determining the right-hand sidesina fourth-order a pseudo-parabolic equationis investigated. The inverse problem consists in determining the unknown right-hand sides depending on the time by redefinition of the interior points. The existence and uniqueness theorem for the solution of the inverse problem is proved.*

***Key words:*** *inverse problem, pseudoparabolic equation, over determination conditions, the method of the system of Volterra integral equations.*

**Киришүү.** Бул иште төртүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеменин оң жагын аныктоо тескери маселеси каралган. Тескери маселе теңдемедеги убакыттан көз каранды болгон белгисиз функцияларды ички чекиттердеги кошумча шарт боюнча аныктоо маселесинен турат. Каралган тескери маселе үчүн анын чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү локалдык теорема далилденет.

Үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелер үчүн тескери маселелер [1,2] монографияларда изилденген. Ал эми [3,4] эмгектеринде төртүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме үчүн сызыктуу тескери маселелер каралган.

**Тескери маселенин коюлушу жана изилдениши.**

Төмөнкү шарттарды канаатандырган

$u(t,x) \in C^{(1,3)}(G)$ жана $\varphi_i(t) \in C[0,T]$ $(i=1..n)$ функцияларын

$$u_t(t,x) = a_0(Au)_t(t,x) + a_1(Au)(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) f_i(t,x) + F(t,x), \quad \forall (t,x) \in G \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in [0,1], \tag{2}$$

$$u(t,0) = u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, \; t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(t,x_i) = g_i(t), 0<x_1<x_2< \ldots <x_n<1, \tag{4}$$

табуу тескери маселесин карайлы.

Мында $Au = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 u$, $b_0(t,x)$, $b_1(t,x)$, $b_2(t,x)$, $b_3(t,x)$, с, $u_0(x) \in C^3[0,1]$, $g_i(t) \in C^1[0,T]$ белгилүү функциялар.

$u(t,x)$ чыгарылышы үчүн

$$u_0(0) = u_0'(0) = u_0'(1) = 0, \; g_i(0) = u_0(x_i), \quad i = 1..n. \tag{5}$$

макулдашылган шарттары аткарылсын. Ошондой эле

$$\frac{1}{4}\left[\left(\alpha_3 - \frac{1}{a_0}\right) + \frac{\alpha_1\alpha_2}{3} + \frac{2}{27}\alpha_1^{\,3}\right]^2 + \frac{1}{27}\left[\alpha_2 - \frac{\alpha_1^{\,2}}{3}\right]^3 = 0 \tag{$\gamma$}$$

шарты аткарылсын.

Жаңы белгисиз функция киргизебиз

$$u_t(t,x) = v(t,x). \tag{6}$$

Анда

$$u(t,x) = \int_0^t v(s,x)ds + u_0(x).$$

А оператору менен интегралдык оператордун комутативдигин жана (6) ны колдонуп, (1) теңдемени төмөнкү түрүндө жазып алсак болот

$$v(t,x) = a_0(Av)(t,x) + a_1\int_0^t Av(s,x)ds + a_1(Au_0)(x) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) f_i(t,x) + F(t,x). \tag{7}$$

Чектик шарттарын төмөнкү түрүндө берилет

$$v(t,0) = v_x(t,0) = v_x(t,1) = 0. \tag{8}$$

(7) тендемесин төмөнкү түрдө жазып алабыз.

$$Av = -\frac{a_1}{a_0}\int_0^t Av(s,x)ds + \frac{1}{a_0}v - \frac{a_1}{a_0}Au_0(x) - \frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t) f_i(t,x) - \frac{1}{a_0}F(t,x),$$

Белгисиз $Av(x,t)$ га карата, $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$ ядросунун $R(t,s)=-\frac{a_1}{a_0}\exp\left(-\frac{a_1}{a_0}(t-s)\right)$ резольвентасын колдонуп, чыгарабыз,

$$Av(t,x)-\frac{1}{a_0}v(t,x)=-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)f_i(t,x)+ \\ +\frac{1}{a_0}\int_0^t R(t,s)v(s,x)ds-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t R(t,s)\,\varphi_i(s)f_i(s,x)\,ds+F_1(t,x), \tag{9}$$

мында

$$F_1(t,x)=-\frac{a_1}{a_0}Au_0(x)-\frac{1}{a_0}F(t,x)-\frac{a_1}{a_0}\int_0^t R(t,s)Au_0(x)ds-\frac{1}{a_0}\int_0^t R(t,s)F(s,x)ds.$$

Интегралдоо үчүн Дирихленин формуласын колдонуп, (9) барабардыгын төмөнкү түрүндө жазып алабыз

$$Av(t,x)-\frac{1}{a_0}v(t,x)=\frac{1}{a_0}\int_0^t R(t,s)v(s,x)ds- \\ -\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)f_i(t,x)-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t R(t,s)\varphi_i(s)f_i(s,x)ds+F_1(t,x). \tag{10}$$

Эгерде азырынча (10)-дун оң жагын белгилүү функция катарында кабыл алсак, анда (10) бул үчүнчү тартиптеги бир тектүү эмес жөнөкөй дифференциалдык теңдеме, жана ал төмөнкү теңдемеге эквиваленттүү

$$v(t,x)=\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)\int_0^t R(t,s)v(s,\xi)dsd\xi-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 G(x,\xi)\,\varphi_i(t)f_i(t,\xi)d\xi- \\ -\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 G(x,\xi)\int_0^t R(t,s)\varphi_i(s)f_i(s,\xi)dsd\xi+\int_0^1 G(x,\xi)F_1(t,\xi)d\xi \tag{11}$$

Мында $G(x,\xi)$ - Гриндин функциясы, б.а.

$$y'''+\alpha_1y''+\alpha_2y'+\left(\alpha_3-\frac{1}{a_0}\right)y=0$$

$$y(0)=y'(0)=y'(1)=0$$

четтик маселенин Грин функциясы.

Бул учурда $(\gamma)$ шартынын жана Карданонун формуласынын негизинде

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{\overline{\Delta}_1(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}e^{\mu_1x}+\frac{\overline{\Delta}_2(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}e^{\mu_2x}+\frac{\overline{\Delta}_3(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}e^{\mu_2x}, 0\le x\le\xi\le 1,\\ \left(\frac{\overline{\Delta}_1(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}-\frac{\Delta_1(\xi)}{\Delta(\xi)}\right)(\xi)e^{\mu_1x}+\left(\frac{\overline{\Delta}_2(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}-\frac{\Delta_2(\xi)}{\Delta(\xi)}\right)(\xi)e^{\mu_2x}+\\ +\left(\frac{\overline{\Delta}_3(\xi)}{\overline{\Delta}(\xi)}-\frac{\Delta_3(\xi)}{\Delta(\xi)}\right)(\xi)e^{\mu_2x}, 0\le\xi\le x\le 1,\end{cases} \tag{12}$$

болот. Мында

$$\Delta(\xi)=\begin{vmatrix} e^{\mu_1\xi} & e^{\mu_2\xi} & \xi e^{\mu_2\xi} \\ \mu_1 e^{\mu_1\xi} & \mu_2 e^{\mu_2\xi} & (1+\mu_2\xi)e^{\mu_2\xi} \\ -\mu_1^2 e^{\mu_1\xi} & -\mu_2^2 e^{\mu_2\xi} & -(2\mu_2+\mu_2^2\xi)e^{\mu_2\xi} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1(\xi)=\begin{vmatrix} 0 & e^{\mu_2\xi} & \xi e^{\mu_2\xi} \\ 0 & \mu_2 e^{\mu_2\xi} & (1+\mu_2\xi)e^{\mu_2\xi} \\ 1 & -\mu_2^2 e^{\mu_2\xi} & -(2\mu_2+\mu_2^2\xi)e^{\mu_2\xi} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2(\xi)=\begin{vmatrix} e^{\mu_1\xi} & 0 & \xi e^{\mu_2\xi} \\ \mu_1 e^{\mu_1\xi} & 0 & (1+\mu_2\xi)e^{\mu_2\xi} \\ -\mu_1^2 e^{\mu_1\xi} & 1 & -(2\mu_2+\mu_2^2\xi)e^{\mu_2\xi} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3(\xi)=\begin{vmatrix} e^{\mu_1\xi} & e^{\mu_2\xi} & 0 \\ \mu_1 e^{\mu_1\xi} & \mu_2 e^{\mu_2\xi} & 0 \\ -\mu_1^2 e^{\mu_1\xi} & -\mu_2^2 e^{\mu_2\xi} & 1 \end{vmatrix},$$

$$\overline{\Delta}(\xi)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & 1 \\ \mu_1 e^{\mu_1} & \mu_2 e^{\mu_2} & (1+\mu_2)e^{\mu_2} \end{vmatrix}, \quad \overline{\Delta_1}(\xi)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 1 \\ Z & \mu_2 e^{\mu_2} & (1+\mu_2)e^{\mu_2} \end{vmatrix},$$

$$\overline{\Delta_2}(\xi)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 1 \\ \mu_1 e^{\mu_1} & Z & (1+\mu_2)e^{\mu_2} \end{vmatrix}, \quad \overline{\Delta_3}(\xi)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \mu_1 e^{\mu_1} & \mu_2 e^{\mu_2} & Z \end{vmatrix},$$

Жазууну жөнөкөйлөтүү үчүн белгилөөлөрдү киргизип алабыз

$$K_i(s,t,x)=-\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)R(t,s)f_i(s,\xi)d\xi,$$

$$P_i(t,x)=\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)f_i(t,\xi)d\xi, \text{ i =1..n}, \tag{13}$$

$$F_2(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)F_1(t,\xi)d\xi.$$

Анда (11)-ди төмөнкү түрдө жазып алабыз

$$v(t,x)+\sum_{i=1}^n P_i(t,x)\varphi_i(t)=\frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi)R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds+\sum_{i=1}^n\int_0^t K_i(s,t,x)\varphi_i(s)ds+F_2(t,x). \tag{14}$$

(4) кошумча шартын колдонуп, (14)-төн

$$\sum_{j=1}^n P_j(t,x_i)\varphi_j(t)=\int_0^t\int_0^1 G(x_j,\xi)\frac{1}{a_0}R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds+\sum_{j=1}^n\int_0^t K_j(s,t,x_i)\varphi_j(s)ds+F_2(t,x_i)-g_i'(t), \qquad i=1.n. \tag{15}$$

теңдемесин алабыз.

(1)-(4) маселесинин чыгарылышы $C^{1,3}(G)\times C_n[0,T]$ мейкиндигинде (14)-(15) канаатандырат.

Эгерде (14)-(15) чыгарылышы жашаса, анда $v(t,x)$ Грин функциянын касиети боюнча (8) шарттарын канаатандырат.

Ошентип, ($n$+1)-белгисиз менен, $n$+1сызыктуу интегралдык теңдемелерден, (1)-(4) тескери маселеси (14)-(15) системасына эквиваленттүү жана төмөнкү вектор түрүндө жазып алсак болот.

Эми төмөнкү

$$\begin{vmatrix} P_1(t,x_1) & P_2(t,x_1)\cdots & P_n(t,x_1) \\ P_1(t,x_2) & P_2(t,x_2)\cdots & P_n(t,x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_1(t,x_n) & P_2(t,x_n)\cdots & P_n(t,x_n) \end{vmatrix} \neq 0, \forall t \in [0,T], \quad (16)$$

шарты аткарылсын дейли.

Анда (14)-(15) система Вольтерранын экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер системасы болот. Ошентип, төмөнкү теорема далилденди.

**ТЕОРЕМА 1**. Мейли төмөнкү шарттар аткарылсын:

а) $b_0(t,x)$, $b_1(t,x)$, $b_2(t,x)$, $b_3(t,x)$, $f_i(t,x)$, $F(t,x) \in$C(G), $u_0(x) \in C^3[0,1]$, $g_i(t) \in C^1[0,T]$;

б) (5), $(\gamma)$, (16).

Анда (1)-(4) тескери маселеси $\{u(t,x), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$

$C^{1,3}(G) \times C_n[0,T]$ мейкиндигинен жалгыз чыгарылышка ээ.

**Адабияттар:**

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. - 183 с.
2. Атаманов Э.Р. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений. - Фрунзе: Илим, 1990. - 101с.
3. Асанов А. Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения // Сиб. мат. журн. - 1995. - Т. 36. - №4. - С. 752-762.
4. Матанова К.Б. Об одной обратной задаче для псевдопараболического уравнения. // Научные труды ОшГУ. Физ.-мат.науки. - 1999. - Вып. 2. - С. 137-145.

**Рецензент: к.ф.-м.н. Матанова К.Б.**