МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

MATHEMATICAL SCIENCES

Омуралиев А.С., Кулманбетова С.М.

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

A.S. Omuraliev, S.M. Kulmanbetova

ABOUT ONE EXAMPLE FOR A SINGULARLY PERTURBED PARABOLIC SYSTEM IN THE CRITICAL CASE

УДК: 519.633-629

Рассматривается задача, когда предельная матрица имеет кратное собственное значение. Анализировано построение асимптотики, которое основано на методе регуляризации для сингулярно возмущенных задач, разработанный С.А. Ломовым и адаптированный на сингулярно возмущенных параболических уравнениях.

***Ключевые слова**: сингулярно возмущенная задача, регуляризация, регуляризующие переменные, собственные значения.*

The problem of the limit matrix, which has a multiple eigenvalue, is considered in the research. The construction of the asymptotics based on the regularization method for singularly perturbed problems, which developed by S.A. Lomov and adapted on singularly perturbed parabolic equations is analyzed.

***Key words:** singularly perturbed problem, regularization, regularizing variables, eigenvalues.*

Рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon \partial_t u - \varepsilon^2 a(x) \partial_x^2 u - A(t)u = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega,$$

$$u\big|_{t=0} = 0, u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0. \tag{1}$$

Построим асимптотику решение уравнения (1), когда предельная матрица имеет нулевое кратное собственное значение.

Пусть

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad u(x,t,\varepsilon) = col(u_1(x,t,\varepsilon), u_2(x,t,\varepsilon), u_3(x,t,\varepsilon),$$

$$f(x,t) = \begin{pmatrix} (1+x)t \\ 0 \\ x(1+t) \end{pmatrix}, \qquad a(x) = 1 + x;$$

Матрица A(t) имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = -2$ и соответствующие собственные векторы:

$$b_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2(t) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix},$$

α, β, γ- произвольные постоянные. Ортогонализируя, получим новые собственные векторы: вводя новые векторы [1] $y_1 = b_1, y_2 = b_2 + sb_1$, исходя из условия $(y_1, y_2) = 0$, найдем

$$s = -\frac{(b_1, b_2)}{(b_1, b_1)}, \quad y_3 = b_3,$$

$$s = -\frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}, y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix},$$

$$\theta_1(t) = \frac{\alpha_2^2\beta_1 - \alpha_1\alpha_2\beta_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \qquad \theta_2(t) = \frac{\alpha_1^2\beta_2 - \alpha_1\alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2},$$

Произведем регуляризацию задачи (1), для чего, следуя [4], введем регуляризующие переменные

$\tau = \dfrac{t}{\varepsilon^2}, \qquad \mu \ = \dfrac{-2t}{\varepsilon}, \qquad \xi_l = \dfrac{\varphi_l(x)}{\varepsilon},$

$\varphi_l(x) = 2(-1)^{l-1}\left[\sqrt{1+x} - \sqrt{l}\,\right], \eta_l = \frac{\varphi_l(x)}{\sqrt{\varepsilon^3}}, l = 1,2.$ (2)

и расширенную функцию $\tilde{u}(M,\varepsilon)$, $M = (x,t,\eta,\xi,\tau,\mu)$, $\xi = (\xi_1,\xi_2)$,

$\eta = (\eta_1,\eta_2)$, такую, что

$\tilde{u}(M,\varepsilon)\big|_{\theta=\gamma(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,t,\varepsilon),\ \gamma(x,t,\varepsilon) = \left(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\varepsilon^3}}, \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right),$ (3)

$\theta = (\eta,\xi,\tau,\mu), \varphi(x) = \big(\varphi_1(x),\varphi_2(x)\big), \psi(t) = \big(\psi_{k+1}(t), \psi_{k+2}(t), \dots, \psi_m(t)\big).$

Тогда, на основании (1), (2), (3), для расширенной функции поставим задачу

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}(M,\varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon}T_0\tilde{u} + \mathcal{D}_\lambda\tilde{u} - \sqrt{\varepsilon}L_\eta\tilde{u} + \varepsilon T_1\tilde{u} - \varepsilon\sqrt{\varepsilon}L_\xi\tilde{u} - \varepsilon^2 L_x\tilde{u} = f(x,t), M \in Q$$
$$\tilde{u}\big|_{t=0,\tau=\mu=0} = 0, \tilde{u}\big|_{x=0,\xi_1=\eta_1=0} = \tilde{u}\big|_{x=1,\xi_2=\eta_2=0} = 0, Q(0,1)\times(0,T)\times(0,\infty) \quad (4)$$

$$L_z \equiv (1+x)\sum_{l=1}^{2}\left[2\frac{(-1)^{l-1}}{\sqrt{1+x}}\partial^2_{xz_l} - \frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}\partial_{z_l}\right],\ \ T_0 \equiv \partial_\tau - \Delta_\eta, T_1 \equiv \partial_t - \Delta_\xi,$$

$$\mathcal{D}_\lambda \equiv -2\partial_\mu - A(t),\ \ L_x \equiv (1+x)\partial_x^2. \quad (5)$$

Решение задачи (5) будем определять в виде ряда

$$\tilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{k=-2}^{\infty}\varepsilon^{\frac{k}{2}}u_k(M). \quad (6)$$

Для коэффициентов получим итерационные уравнения

$$T_0 u_\nu(N) = 0, \nu = -2,-1,$$
$$T_0 u_0(M) = -\mathcal{D}_\lambda u_{-2}(M),\ \ T_0 u_1(M) = -\mathcal{D}_\lambda u_{-1} + L_\eta u_{-2},$$
$$T_0 u_2(M) = -\mathcal{D}_\lambda u_0 + f(x,t) - T_1 u_{-2}(M) + L_\eta u_{-1}, \quad (7)$$
$$Tu_k(M) = -\mathcal{D}_\lambda u_{k-2}(M) - T_1 u_{k-3} + L_\eta u_{k-4}(M) + L_\xi u_{k-5}(M) + L_x u_{k-6}(M).$$

Введем класс функций, в котором будут решаться итерационные задачи:

$$U = \{u_k(x,t)\colon u_k(x,t) = \sum_{i=1}^{3}[\,v_{k,i}(x,t) + Y_{t,i}(N) +$$
$$+(c_{i,3}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\omega^l_{i,3}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right))\exp(\mu)]y_i,$$
$$v_i(x,t) \in C^\infty(\bar{\Omega}),\ \ |Y_i(N)| < c\exp\left(-\frac{\eta_l^2}{8\tau}\right), c_{i,j}(x,t),\ \ \omega^l_{i,j}(x,t) \in C^\infty(\bar{\Omega})\}.$$

$N = (x,t,\eta,\tau), \eta = (\eta_1,\eta_2)$, $\xi = (\xi_1,\xi_2)$, y_i, $i = 1,2,3$ – собственный вектор матрицы *A(t),* отвечающий собственному значению $\lambda_i(t)$.

Решение итерационных задач.

Удовлетворим функцию $u_k(M)$ краевым условиям (1):

$$v^1_{k,i}(x,t)\big|_{t=0} = -c^k_{i,3}(x,0), \qquad i = 1,2;\ \ c^k_{3,3}(x,0) = -v_{k,3}(x,0),$$
$$\mathrm{Y}^k_i(N) = \big|_{t=0} = 0,\ Y^k_i(N)\big|_{\eta_l=0} = d^{k,l}_i(x,t), \quad \omega^{k,l}_{i,3}(x,t)\big|_{t=0} = \widetilde{\omega}^{k,l}_{i,3}(x),$$
$$d^{k,l}_i(x,t)\big|_{t=0} = \tilde{d}^{k,l}_i(x), \quad \omega^{k,l}_{i,3}(x,l)\big|_{x=l-1} = -c^k_{i,3}(l-1,t),$$
$$d^{k,l}_i(x,t)\big|_{x=l-1} = -\nu_{k,i}(l-1,t),\ \ d^{k,l}_i(x,t)\big|_{x=l-1} = -\nu_{k,i}(l-1,t) \quad (7_1)$$

Функция $u_\nu(M)$ в классе U имеет решение представимое в виде

$$u_\nu(M) = \sum_{i=1}^{3}\left[v_{\nu,i}(x,t) + \sum_{l=1}^{2} \Upsilon_{\nu,i}^{l}(N_1)\right] y_i +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\left[c_{i,3}^{\nu}(x,t) + \sum_{l=1}^{2} \omega_{i,3}^{\nu,l}(x,t) erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right] e^{\mu} y_i, \quad \nu = -2,-1; \qquad (8)$$

где

$$\Upsilon_{\nu,i}^{l}(N_2) = d_{\nu,i}^{l}(x,t) erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{\tau}}\right),\ d_{\nu,i}^{1}(0,t) = -v_{\nu,i}(0,t),\ d_{\nu,i}^{2}(1,t) = -v_{\nu,i}(1,t),$$

$$d_{\nu,i}^{l}(x,t)\big|_{t=0} = \tilde{d}_{\nu,i}^{l}(x), \qquad \nu = -2,-1, \qquad i = 1,2.$$

Вычислим правую часть уравнения относительно $u_0(M)$:

$$F_0(M) = T_1 u_{-2}(M) \equiv 2\partial_\mu u_{-2} + A(t) u_{-2} =$$

$$= -\lambda_3 \sum_{i=1}^{3}\left[c_{i,3}^{-2}(x,t) + \sum_{l=1}^{2} \omega_{i,3}^{-2,l}(x,t) erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right] \exp(\mu)\, y_i -$$

$$-\lambda_3\left[c_{3,3}^{-2}(x,t) + \sum_{l=1}^{2} \omega_{3,3}^{-2,l}(x,t) erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right] \exp(\mu)\, y_3 + \lambda_3 v_{-2,3}(x,t) y_3 +$$

$$+\left[\sum_{l=1}^{2} \lambda_3 \Upsilon_{-2,3}^{l}(N_1)\right] y_3,$$

Обеспечивая разрешимость в U, положим

$v_{-2,3}(x,t) = 0, c_{1,3}^{-2}(x,t) = 0, c_{2,3}^{-2}(x,t) = 0, \omega_{1,3}^{-2,l}(x,t) = 0, \omega_{2,3}^{-2,l}(x,t) = 0,$

а функции $c_{3,3}^{-2}(x,t), \omega_{3,3}^{-2,l}(x,t), v_{-2,1}(x,t), v_{-2,2}(x,t) -$ произвольны и при этом правая часть примет вид:

$F_0(M) = T_1 u_{-2} = -\lambda_3 \sum_{l=1}^{2} \Upsilon_{-2,3}^{l}(N_1) y_3.$

Уравнение $T_0 u_0(M) = F_0(M)$ имеет решение представимое в виде (8) с индексом $\nu = 0$, если $\Upsilon_{0,i}^{l}(N_1),\ i = 1,2,3$ решения уравнений

$$\partial_\tau \Upsilon_{0,i}^{l} = \partial_{\eta_l}^{2} \Upsilon_{0,i}^{l}, \qquad i = 1,2$$

$$\partial_\tau \Upsilon_{0,3}^{l} = \partial_{\eta_l}^{2} \Upsilon_{0,3}^{l} - \lambda_3 \Upsilon_{-2,3}^{l}(N_1) \qquad (9)$$

при граничных условиях

$$\Upsilon_{0,i}^{l}\big|_{t=0} = 0, \qquad \Upsilon_{0,i}^{l}\big|_{\eta_l=0} = d_{0,i}^{l}(x,t), \qquad d_{0,i}^{1}(0,t) = -v_{0,i}(0,t),$$

$$d_{0,i}^{2}(x,t)\big|_{t=0} = d_{0,i}^{l,0}(x), \qquad d_{0,i}^{2}(x,t)\big|_{x=1} = -v_{i,0}(1,t),$$

Из этой задачи определим

$$\Upsilon_{0,i}^{l}(N_1) = d_{0,i}^{l}(x,t) erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{\tau}}\right), \qquad i = 1,2.$$

$$\Upsilon_{0,3}^{l} = d_{0,3}^{l}(x,t) erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{\tau}}\right) -$$

$$-\lambda_3 \int_0^\tau \int_0^\infty \frac{d_{-2,3}^{l}(x,t)}{4\pi(\tau - z)} erfc\left(\frac{s}{2\sqrt{z}}\right)\left[exp\left(-\frac{(\eta_l - s)^2}{4(\tau - z)}\right) -\right.$$

$$\left.-exp\left(-\frac{(\eta_l + s)^2}{4(\tau - z)}\right)\right] dzds.$$

Произвольная функция $d_{-2,i}^{l}(x,t)$ определяется из задачи

$$\partial_t d_{-2,i}^{l}(x,t) = 0, \qquad i = 1,2$$

$$d^{l}_{-2,i}(x,t)\big|_{t=0} = d^{l,0}_{-2,i}(x),$$

Подставив полученное решение в $L_\eta u_{-2}(M) = 0$ выбором $d^{l,0}_{-2,i}(x)$, как решение задачи

$$2\varphi_l'(x)\frac{d}{dx}\left(d^{l,0}_{-2,i}(x)\right) + \varphi_l''(x) d^{l,0}_{-2,i}(x) = 0, d^{l,0}_{-2,i}(x)\big|_{x=l-1} = -v_{-2,i}(l-1,t)$$

обеспечим $L_\mu u_{-2}(M) = 0$. Отсюда определим

$$d^{l,0}_{-2,i}(x) = -v_{-2,i}(l-1,t)\left(\frac{1+x}{l}\right)^{\frac{1}{4}},$$

тогда

$$Y^{l}_{-2,i}(N_1) = -v_{-2,i}(l-1,t)\left(\frac{1+x}{l}\right)^{\frac{1}{4}} erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{\tau}}\right).$$

Рассмотрим следующий свободный член, с учетом предыдущего, имеем

$$F_1(M) = -T_1 u_{-1}(M) + L_\eta u_{-2}(M) =$$

$$= -\lambda_3 \sum_{i=1}^{3}\left[c^{-1}_{i,3}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\omega^{-1,l}_{i,3}(x,t) erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right] e^{\mu_3} y_i +$$

$$+\lambda_3\left[c^{-1}_{3,3}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\omega^{-1,l}_{3,3}(x,t) erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right] e^{\mu_3} y_3 +$$

$$+\lambda_3 v_{-1,3}(x,t) y_3 + \lambda_3 \sum_{l=1}^{2} \mathrm{Y}^{l}_{-1,3}(N_1) y_3.$$

Отсюда, обеспечивая разрешимость и учитывая, что $L_\eta u_{-2}(M) = 0$, положим

$$c^{-1}_{i,3}(x,t) = 0, \qquad \omega^{-1,l}_{i,3}(x,t) = 0, \qquad v_{-1,3}(x,t) = 0, \qquad i = 1,2$$

при этом $c^{-1}_{3,3}(x,t)$, $\omega^{-1,l}_{3,3}(x,t)$, $v_{-1,i}(x,t)$, $i = 1,2$ произвольны. Тогда свободный член примет вид:

$$F_1(M) = -\lambda_3 \sum_{l=1}^{2} \mathrm{Y}^{l}_{-1,3}(N_1) y_3.$$

Решение $\mathrm{Y}^{l}_{1}(N_1)$, запишется также, как для уравнения (9).

Рассмотрим свободный член следующего уравнения:

$$F_2(M) = -T_1 u_0(M) + L_\eta u_{-1} - T_2 u_{-2} + f(x,t) =$$

$$= -\lambda_3 \sum_{i=1}^{3}\left[c^{0}_{i,3}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\omega^{0,l}_{i,3}(x,t) erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right] e^{\mu_3} y_i +$$

$$+\lambda_3\left[c^{0}_{3,3}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\omega^{0,l}_{3,3}(x,t) erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right] e^{\mu_3} y_3 + \lambda_3 v_{0,3}(x,t) y_3 +$$

$$+\lambda_3 \sum_{l=1}^{2} \mathrm{Y}^{l}_{0,3}(N_1) y_3 - \sum_{i=1}^{3}\left[\partial_t v_{-2,i}(x,t) + \sum_{l=1}^{2} \partial_t \mathrm{Y}^{l}_{-2,i}(N_1)\right] y_i -$$

$$-\sum_{l=1}^{3}\left[\partial_t c^{-2}_{i,3}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\partial_t \omega^{-2,l}_{i,3}(x,t) erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right] e^{\mu_3} y_i + \sum_{i=1}^{3} f_i(x) y_i.$$

Из условия разрешимости следующего итерационного уравнения, получим

$$\partial_t v_{-2,i}(x,t) = f_i(x), \qquad i = 1,2$$

$$\lambda_3 v_{0,3}(x,t) = f_3(x), \qquad \partial_t \mathrm{Y}^{l}_{-2,i}(N_1) = 0, \ \partial_t c^{-2}_{3,3}(x,t) = 0, \qquad \partial_t \omega^{-2,l}_{3,3}(x,t) = 0$$

$$f_1(x) = \frac{\alpha_1 T^2}{2}(1+x), \qquad f_2(x) = \frac{\beta_1 T^2}{2}(1+x), \qquad f_3(x) = \left(T + \frac{T^2}{2}\right)\gamma x,$$

$$\lambda_3 c_{i,3}^{0}(x,t) = -\partial_t c_{i,3}^{-2}(x,t), \qquad i = 1,2$$

$$\lambda_3 \omega_{i,3}^{0,l}(x,t) = -\partial_t \omega_{i,3}^{-2,l}(x,t), \qquad i = 1,2.$$

Решая эти уравнения при начальных условиях:

$$v_{-2,i}(x,t)\big|_{t=0} = -c_{i,3}^{-2}(x,0) = 0, \qquad c_{3,3}^{-2}(x,0) = -v_{-2,3}(x,0) = 0,$$

$$\omega_{3,3}^{-2,l}(x,0)\big|_{t=0} = \widetilde{\omega}_3^{-2,l}(x), \qquad \omega_{3,3}^{-2,l}(l-1,t) = -c_{3,3}^{-2}(l-1,t),$$

получим

$$v_{-2,1}(x,t) = \frac{\alpha_1 T^2}{2}(1+x)t, \qquad v_{-2,2}(x,t) = \frac{\theta_1 T^2}{2}(1+x)t,$$

$c_{i,3}^{0}(x,t) = 0, i = 1,2$ (10)

$$\omega_{i,3}^{0,l}(x,t) = 0, c_{3,3}^{-2} = 0, \omega_{3,3}^{-2,0}(x,t) = \widetilde{\omega}_3^{-2,l}(x),$$

$$v_{0,3}(x,t) = \frac{1}{\lambda_3}\left(T + \frac{T^2}{2}\right)\gamma x;$$

Следующий свободный член запишется:

$$F_3(M) = -T_1 u_1 + L_\eta u_0 - T_2 u_{-1} + L_\xi u_{-2} =$$

$$= -\lambda_3 \sum_{i=1}^{3}\left[c_{i,3}^{1}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\omega_{i,3}^{1,l}(x,t) erfs\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right] e^{\mu_3} y_i +$$

$$+\lambda_3\left[c_{3,3}^{1}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\omega_{3,3}^{1,l}(x,t) erfs\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right] e^{\mu_3} y_3 + \lambda_3 v_{1,3}(x,t) y_3 +$$

$$+\lambda_3 \sum_{l=1}^{2} \Upsilon_{1,3}^{l}(N_l) y_3 - \sum_{i=1}^{3}\left[\partial_t v_{-1,i}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\partial_t \Upsilon_{-1,i}^{l}(N_1)\right] y_i -$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\left[\partial_t c_{i,3}^{-1}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\partial_t \omega_{i,3}^{-1,l}(x,t) erfs\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right] e^{\mu_3} y_i.$$

Положим,

$$\partial_t c_{3,3}^{-1}(x,t) = 0, \qquad \partial_t \omega_{3,3}^{-1,l}(x,t) = 0,$$

$$\lambda_3 c_{i,3}^{1}(x,t) = -\partial_t c_{i,3}^{-1}, \qquad \lambda_3 \omega_{i,3}^{1,l}(x,t) = -\partial_t \omega_{i,3}^{1,l}(x,t), \qquad i = 1,2$$

$\lambda_3 v_{1,3}(x,t) = \partial_t v_{-1,3}(x,t),\ \partial_t v_{-1,i}(x,t) = 0,\ \partial_t \Upsilon_{-1,i}^{l}(N_l) = 0.$ (11)

Тогда, $c_{3,3}^{1}(x,t)$, $\omega_{3,3}^{1,l}(x,t)$ – произвольны и

$$F_3(M) = \lambda_3 \sum_{l=1}^{2} \Upsilon_{1,3}^{l}(N_1).$$

Начальные условия для этих уравнений:

$$c_{3,3}^{-1}(x,t)\big|_{t=0} = -v_{-1,3}(x,0) = 0, \qquad v_{-1,i}(x,0) = -c_{i,3}^{-1}(x,0) = 0,$$

$$\Upsilon_{-1,i}^{l}(N_1)\big|_{t=0} = 0, \omega_{3,3}^{-1,l}(x,t)\big|_{t=0} = \widetilde{\omega}_{3,3}^{-1,l}(x), \qquad \Upsilon_{-1,i}^{l}(N_l)\big|_{\eta_l=0} = d_{-1,i}^{l}(x,t)$$

$$d_{-1,i}^{l}(x,t)\big|_{x=l-1} = -v_{-1,i}(l-1,t), \qquad d_{-1,i}^{l}(x,t)\big|_{t=0} = d_{-1,i}^{0,l}(x),$$

$$v_{-1,i}(x,0) = -c_{i,3}^{-1}(x,0), \qquad i = 1,2.$$

Используя эти условия из (11), определим

$$c_{i,3}^{1}(x,t)=0,\quad \omega_{i,3}^{1,l}(x,t)=0,\ v_{1,3}(x,t)=0,\ v_{-1,i}(x,t)=0,\qquad i=1,2$$

$$Y_{-1,i}^{l}(N_l)=0,$$

а функции $c_{3,3}^{1}(x,t)$, $\omega_{3,3}^{1,l}(x,t)$, $v_{1,i}(x,t)$ – произвольны.

Входящее в $F_3(M)$ выражение $L_\xi u_{-2}(M)$ обращаем в нуль выбором произвольной функции $\widetilde{\omega}_3^{-2,l}(x)$. Далее процесс повторяется.

Главный член асимптотики запишется

$$u_0(M)=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\alpha T^2}{2}(1+x)t\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ 0\end{pmatrix}+\frac{\theta_1 T^2}{2}(1+x)t\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ 0\end{pmatrix}\right]+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left[-\frac{\alpha T^2}{2}\,t\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ 0\end{pmatrix}\left(\frac{1+x}{1}\right)^{\frac{1}{4}}-\left(\frac{1+x}{1}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\theta_1 T^2}{2}\,t\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ 0\end{pmatrix}\right]erfc\left(\frac{\eta_1}{2\sqrt{\tau}}\right)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\alpha T^2}{2}2\,t\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ 0\end{pmatrix}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\theta_1 T^2}{2}2\,t\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ 0\end{pmatrix}\right]erfc\left(\frac{\eta_2}{2\sqrt{\tau}}\right)$$

$$+\frac{1}{\lambda_3}\left(T+\frac{T^2}{2}\right)\gamma x\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \gamma\end{pmatrix}-\left[\left(T+\frac{T^2}{2}\right)\gamma\frac{1}{\lambda_3}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}erfc\left(\frac{\eta_2}{2\sqrt{\tau}}\right)\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \gamma\end{pmatrix}\right]-$$

$$-\left[\frac{1}{\lambda_3}\left(T+\frac{T^2}{2}\right)\gamma x\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \gamma\end{pmatrix}-\frac{1}{\lambda_3}\left(T+\frac{T^2}{2}\right)\gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}erfc\left(\frac{\xi_2}{2\sqrt{t}}\right)\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \gamma\end{pmatrix}\right]e^{\mu_3}.$$

Литература:

1. Беллман Р. Введение в теорию матрицы. - М., 1969. - С. 368.
2. Ломов С.А. Аналитические решения сингулярно возмущенных. Докл. АН СССР, 1982. - Т. 265, вып. 3. - С. 529-532.
3. Омуралиев А.С. Регуляризация двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи. Журнал вычис. математики и мат. физики, - 2006. - Т. 46. - №8. - С. 1447-1456.
4. Омуралиев А.С., Кулманбетова С.М. Сингулярно возмущенная система параболических уравнений в критическом случае − Вестник Пермского университета. - Пермь, вып. 2(33). 2016. - С. 82-87.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Урдалетова А.Б.