Тасмамбетов Ж.Н., Жахина Р.У., Тасмамбетова А.Ж.

ЭКИ ӨЗГӨРМӨЛҮҮ БЕССЕЛЬ ФУНКЦИЯСЫНА КЕЛТИРИЛҮҮЧҮ ЖОЮЛУП КЕТҮҮЧҮ ГИПЕРГЕОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯНЫ ТУРГУЗУУ

Тасмамбетов Ж.Н., Жахина Р.У., Тасмамбетова А.Ж.

ПОСТРОЕНИЕ ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ СВОДЯЩЕЙСЯ К ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

J.N. Tasmambetov, R.U. Zhakhina, A.J. Tasmambetova

THE CONSTRUCTION OF THE CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTION REDUCES TO THE BESSEL FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

УДК: 517.946; 517.58

Макалада Фробениус-Латышева ыкмасынын жардамы менен каралып жаткан системанын чыгарылышынын өзгөчө ийрилердин аймагындагы түзүлүшүн түздөн-түз аныктоого мүмкүн экендиги көрсөтүлгөн. Системанын өз ара сызыктуу көз каранды эмес үч чыгарылышы болору жана алардын бири эки өзгөрүлмөлүү Бессель функциясына келтирилүүчү жоюла турган гипергеометриялык катар түрүндө болору жөнүндөгү теорема далилденген. Логарифмалык чыгарылыш жана эки аргументтен көз каранды болуп жалпыланган катар түрүндөгү чыгарылыштын бар болушунун шарттары такталган.

Негизги сөздөр: *жоюлуп кетүүчү, гипергеометриялык катар, Бессель функциясы, шарттар, логарифмалык чыгарылыш, өзгөчө ийрилер.*

В работе решения изучаемой системы построены с помощью метода Фробениуса-Латышевой, позволяющего непосредственно определять структуру и строить решения систем вблизи особых кривых. Доказана теорема, где устанавливается, что она имеет три линейно независимых частных решения, одним из которых является решение в виде вырожденного гипергеометрического ряда, сводящегося к функциям Бесселя двух переменных. Установлены условия, существования решения в виде обобщенного степенного ряда двух переменных и логарифмического решения.

Ключевые слова: *вырожденный, гипергеометрический ряд, функция Бесселя, условия, логарифмическое решение, особые кривые.*

In this article, the solutions of the system under study are constructed using the method Frobennis-Latysheva, which makes it possible to directly determine the structure and construct solutions of systems near singular curves. The theorem is proved, where it is established that it has three linearly independent particular solutions, one of this solution is the form of a degenerate hypergeometric series that leads to Bessel functions of two variables. The existence conditions for the solution is the form of a generalized the series of two interleaved and logarithmic solutions are established.

Key words: *degenerate, hypergeometric series, Bessel function, condition, logarithmic solution, singular curves.*

В теорий функций двух переменных известны 20 вырожденных гипергеометрических рядов двух переменных: $\Phi_i(\ i=1,2,3), \Psi_j\ (j=1,2),\ \Xi_j\ (j=1,2)$ (М. Гумберт), $\Gamma_j\ (j=1,2), \mathrm{H}_k\ (k=\overline{1-11})$ (Я. Горн и Л. Борнгессер). Они, получены из функций П. Аппеля F_1-F_4, с помощью предельных переходов [1]- [2]. Все они являются решениями некоторых систем. Эти системы были установлены Я. Горном [3, с. 220-221].

Целью данной работы является изучение специальной системы и вырожденной гипергеометрической функции, сводящейся к функции Бесселя двух переменных, а также исследование их отличительных свойств. Установление возможности существование логарифмических рядов Бесселя двух переменных.

1. Основные сведения о предельных переходах и функциях двух переменных.

Здесь мы опираемся на известные данные по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1, с.123].

Действительно, осуществляя предельный переход в гипергеометрической функции Гаусса, получаем равенство

$$F\left(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon},\gamma;\varepsilon^2 x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_m\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_m}{(\gamma)_m m!}\cdot\varepsilon^{2m}\cdot x^m, \qquad (1.1)$$

где использованы обозачения Похгаммера

$$(a)_m=a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1),\quad (a)_0=1.$$

Нетрудно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_m\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_m\cdot\varepsilon^{2m}=1, \qquad (1.2)$$

поэтому (1.1) принимает вид

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F\left(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon},\gamma;\varepsilon^2 x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma)_m}\cdot\frac{1}{m!}\cdot x^m,$$

тогда, введя обозначение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma; \varepsilon^2 x\right) = J(\gamma, x),$$

получим справедливость равенства

$$J(\gamma, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma)_m} \cdot \frac{1}{m!} \cdot x^m. \qquad (1.3)$$

Функция Бесселя $J_R(x)$ через функцию $J(\gamma, x)$ выражается следующим образом:

$$J_R(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma(k+1)} \cdot J\left(k+1, -\frac{x^2}{2^2}\right). \qquad (1.4)$$

Функция $J(\gamma, x)$ называется функцией, сводящейся к функции Бесселя, и является решением вырожденного гипергеометрического уравнения

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \gamma \cdot \frac{dy}{dx} - y = 0. \qquad (1.5)$$

Теперь нас интересует предельный переход в функциях двух переменных.

Определение 1.1 Гипергеометрическая функция $F_1(\alpha, \beta, \beta'; \gamma; x, y)$ двух переменных x и y определяется с помощью ряда

$$F_1(\alpha, \beta, \beta'; \gamma; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} \cdot (\beta)_m \cdot (\beta')_n}{(\gamma)_{m+n} \cdot m! \cdot n!} \cdot x^m \cdot y^n, \qquad (1.6)$$

где ряд (1.6) сходится абсолютно и равномерно в области $|x| < 1,\ |y| < 1$.

Определение 1.2. Функция $F_1(\alpha, \beta, \beta'; \gamma; x, y)$ является частным решением системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left.\begin{aligned} x(1-x)Z_{xx} + y(1-x)Z_{xy} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]Z_x - \beta y Z_y - \alpha\beta Z = 0, \\ y(1-y)Z_{yy} + x(1-y)Z_{xy} + [\gamma - (\alpha+\beta'+1)y]Z_y - \beta' x Z_x - \alpha\beta' Z = 0, \end{aligned}\right\} (1.7)$$

где $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ – некоторые постоянные, $Z = Z(x, y)$ – общая неизвестная.

Согласно общей теории таких систем [1], если коэффициенты при старших производных Z_{xx}, Z_{xy} и Z_{yy} удовлетворяют условию

$$1 - \frac{y(1-x)}{x(1-x)} \cdot \frac{x(1-y)}{y(1-x)} = 0 \qquad (1.8)$$

то система (1.7) имеет всего три линейно-независимых частных решений, в частности, одним из частных решений является ряд двух переменных (1.6).

В функциях двух переменных при предельном переходе используется равенство вида (1.2):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_m \cdot \varepsilon^m = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_n \cdot \varepsilon^n = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_{m+n} \varepsilon^{m+n} = 1. \qquad (1.9)$$

В монографии [1, с.124-125] приводится 23 предельных переходов в функциях $F_1 - F_4$, семь из которых связаны с функцией Аппеля F_1. Из семи, в данной работе, нас интересует только XIII-ый предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_1\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}; \gamma; \varepsilon^2 x, \varepsilon^2 y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma)_{m+n}} \cdot \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^n}{n!}, \qquad (1.10)$$

где в параметрах α, β, β' осуществляется предельный переход $\frac{1}{\varepsilon} \to \infty\ (\varepsilon \to 0)$, а так же в независимых переменных $\varepsilon^2 x$ и $\varepsilon^2 y$ (при $\varepsilon \to 0$).

Такой же предельный переход осуществляется так же в системе (1.7).

Тогда получим систему

$$\left.\begin{aligned} x \cdot Z_{xx} + y \cdot Z_{xy} + \gamma \cdot Z_x - Z = 0, \\ y \cdot Z_{yy} + x \cdot Z_{xy} + \gamma \cdot Z_y - Z = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$

где $Z = Z(x, y)$ – общая неизвестная.

Для этого случая докажем справедливость теоремы.

Теорема 1.1. Совместная вырожденная гипергеометрическая система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (1.11), при выполнений условий (1.8) имеет три линейно независимые частные решения, одним из которых является решение в виде вырожденного гипергеометрического ряда

$$Z(\gamma, x+y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma)_{m+n}} \cdot \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^n}{n!}, \qquad (1.12)$$

сводящейся к функциям Бесселя двух переменных.

Для доказательства теоремы применяем метод Фробениуса- Латышевой [4].

2. Применение метода Фробениуса- Латышевой.

Приравнивая к нулю коэффициентов при старших производных Z_{xx}, Z_{yy} и Z_{xy} установим особенности системы (1.11): $x = 0, y = 0$, то есть конечная особенность системы $(0, 0)$, а на бесконечности (∞, ∞).

Система совместная, поскольку, удовлетворяется условия (1.8), поэтому, совместная система (1.11) имеет не более трех линейно независимых частных решений.

При выполнении вышеуказанных условий три линейно независимые частные решения вблизи особенности $(0, 0)$ методом Фробениуса- Латышевой построим в виде обобщенного степенного ряда двух переменных

$$Z(x,y) = x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n \;\; (C_{0,0} \neq 0) \qquad (2.1)$$

где $\rho, \sigma, C_{m,n}$ $(m, n = 0,1,2, \ldots)$ – неизвестные постоянные, которые следует определить.Согласно методу Фробениуса-Латышевой сначала составляется система характеристических функций.

Определение 2.1. Системой характеристических функций системы (2.3) называется система

$$L_1[x^{\rho} \cdot y^{\sigma}] \equiv x^{\rho} \cdot y^{\sigma-1} \cdot \left\{ f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma) + f_{10}^{(1)}(\rho,\sigma) \cdot x \right\},$$

$$L_2[x^{\rho} \cdot y^{\sigma}] \equiv x^{\rho-1} \cdot y^{\sigma} \cdot \left\{ f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma) + f_{01}^{(2)}(\rho,\sigma) \cdot y \right\},$$

полученная из (1.11) путем подстановки $Z = x^{\rho} \cdot y^{\sigma}$.

С помощью

$$f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma) = \rho(\rho - 1 + \sigma + \gamma), \quad f_{10}^{(1)}(\rho,\sigma) = -1,$$

$$f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma) = \sigma(\sigma - 1 + \rho + \gamma), \quad f_{01}^{(2)}(\rho,\sigma) = -1$$

определяются системы определяющих уравнений относительно особенностей $(0, 0)$ и (∞, ∞) и неизвестные коэффициенты ряда (2.1) $C_{m,n}$ $(m, n = 0,1,2, \ldots.)$.

Теорема 2.1. Для существования у системы (1.11) решение вида (2.1) необходимо, чтобы пара (ρ, σ),была корнем системы определяющих уравнений относительно особенностей $(0, 0)$ вида

$$\left. \begin{aligned} f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma) &= \rho(\rho - 1 + \sigma + \gamma) = 0, \\ f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma) &= \sigma(\sigma - 1 + \rho + \gamma) = 0 \end{aligned} \right\} \qquad (2.2)$$

полученная из вспомагательной системы.

В рассматриваемом случае система (2.2) имеет три пары корней:

I. $(\rho_1 = 0, \sigma_1 = 0)$; II. $(\rho_1 = 0, \sigma_2 = 1 - \gamma)$; III. $(\rho_2 = 1 - \gamma, \sigma_1 = 0)$,

позволяющее построить три линейно независимых частных решений системы (1.11).

Неизвестные коэффициенты $C_{m,n}$ $(m, n = 0,1,2, \ldots.)$ ряда (2.1) определяются из системы уравнений рекуррентных последовтельностей

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{\mu-m,\nu-n}^{(j)} \cdot f_{m,n}^{(j)}(\rho + \mu - m, \sigma + \nu - n) = 0 \qquad (2.3)$$

$(\mu, \nu = 0,1,2, \ldots;\; j = 1,2; m, n = 0,1,2, \ldots)$. Подставляя найденные значения неизвестных постоянных ρ, σи $C_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2, \ldots)$ в обобщенный степенной ряд (2.1), последовательно найдем вышеназванные три частные решения.

Первое частное решение, соответствующее показателю $(\rho_1 = 0, \sigma_1 = 0)$, имеет вид

$$Z_1(x,y) = 1 + \frac{x}{\gamma} + \frac{y}{\gamma} + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)} \cdot xy + \frac{1}{2\gamma(\gamma+1)} \cdot x^2 + \frac{1}{2\gamma(\gamma+1)} \cdot y^2 + \cdots =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma)_{m+n}} \cdot \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^n}{n!}. \qquad (2.4)$$

Второе частное решение

$$Z_2(x,y) = y^{1-\gamma} \cdot \left[1 + x + \frac{1}{2-\gamma} \cdot y + \frac{1}{2(2-\gamma)} xy + \frac{1}{2^2} \cdot x^2 + \dots\right]$$

и третье частное решение

$$Z_3(x,y) = x^{1-\gamma}\left[1 + \frac{1}{2-\gamma} x + y + \frac{1}{2(2-\gamma)} xy + + \frac{1}{2(2-\gamma)(3-\gamma)} x^2 \dots\right].$$

Теперь нам следует убедиться выполнению равенства (1.12). Действительно, в (2.4) получен ряд в правой части (1,12). После некоторых преобразовании в (2.4), получим сумму

$$Z_1(x,y) = 1 + \frac{x}{\gamma} + \frac{y}{\gamma} + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)} xy + \frac{1}{2\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{1}{2\gamma(\gamma+1)} y^2 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{x+y}{\gamma} + \frac{(x+y)^2}{2!\,\gamma(\gamma+1)} + \frac{(x+y)^3}{3!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \dots =$$

В теории бесселевых функций известен ряд (1.3), сводящейся к функции Бесселя. По аналогии с (1.3) заключаем, что справедливо равенство

$$J(\gamma, x+y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+m+n-1)} \cdot \frac{(x+y)^{m+n}}{(m+n)!}. \qquad (2.6)$$

и на основании равенств рядов в правых частях (2.4) и (2.5), убедимся в справедливости равенства

$$J(\gamma, x+y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma)_{m+n}} \cdot \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^n}{n!}, \qquad (2.4)$$

что и требовалось доказать.

Применение метода Фробениуса-Латышевой показывает,что вблизи особенностей на бесконечности не существует решения в виде

$Z(x,y) = x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} \cdot x^{-m} \cdot y^{-n} \ (C_{0,0} \neq 0)$ (2.7) где $\rho, \sigma, C_{m,n}\ (m,n = 0,1,2,\dots)$ – неизвестные постоянные, поскольку не выполняется необходимое условие существования решений вблизи этой особенности.

Остановимся еще одному важному случаю. При $\gamma = 1$система определяющих уравнений относительно особенностей $(0,0)$ вида (2.2) вместо трех пар корней имеет трехкратный корень $(\rho_i = 0, \sigma_i = 0)$ $(i = 1,2,3)$. В этом случае, система (1.11) наряду с решением вида (2.4) может иметь логарифмические решения.

3. О построении логарифмических решений.

Теорема 3.1. Пусть параметр $\gamma = 1$ и система определяющих уравнений относительно особенности $(0,0)$ вида (2.2) имеет трехкратный корень $(\rho_i = 0, \sigma_i = 0)$ $(i = 1,2,3)$. Тогда система (1.11) наряду с решением вида (2.4) имеет еще два логарифмические решения вида

$$Z_2(x,y) = Z_1(x,y) lnx + x^{\rho_1} \cdot y^{\sigma_2} \cdot \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n \ (A_{0,0} \neq 0),$$

$$Z_3(x,y) = Z_1(x,y) lny + x^{\rho_2} \cdot y^{\sigma 1} \cdot \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n \ (B_{0,0} \neq 0),$$

где $Z_1(x,y)$ – первое частное решение системы (1.11) вида (2.4); $A_{m,n}$ и $B_{m,n}$ $(m,n = 0,1,2,3,\dots$ – неизвестные постоянные. Они определяются из системы уравнений рекуррентных последовтельностей вида (2.3). Общая методика построения таких решений приведена в монографии [4, с.178].

Таким образом, применение метода Фробениуса-Латышевой позволила нам всесторонне исследовать вырожденную гипергеометрическую систему, полученную путём предельных переходов и установить её всевозможные решения, в частности и решение в виде функции, сводящейся к функциям Бесселя двух переменных. Такие функции и их взаимосвязь с гипергеометрическими функциями двух переменных остаются малоисследованными. Такая методика исследования ранее была использована в работе [5] для установления связей между гипергеометрической функцией Уиттекера и многочленами Лагерра двух переменных.

Литература:

1. P.Appell and J.F.Kampe de Feriet, Functions hypergeometriques et hyperspheriques: Polynomes d'Hermite, Gauthier-Villars, Paris, 1926, 434 pp.
2. Капилевич М.Б. Об одном классе гипергеометрических функций Горна //Дифф. уравнения, 1968. - т. IV. - №8. - С. 1465-1483.
3. Бейтмен Г. и Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции Ч.I. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. - М.: Наука, 1965, 294 с.
4. Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. - Актобе, 2015, 463 с.
5. Zhaxylyk Tasmambetov. Confluent hypergeometric functions and two variables Laquerre polynomials as a solution of Wilczynski type system// AIP Conference Proceedings 1779, 020137 (2016); doi: 10.1063/1.4959751.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Абдылдаева Э.