Мурзабеков З.Н.

ЭКОНОМИКАЛЫК КЛАСТЕРДИН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС СИСТЕМАСЫ ҮЧҮН ЧЕКТЕЛГЕН СИНТЕЗДЕЛГЕН БАШКАРУУНУ КОНСТРУКЦИЯЛОО

Мурзабеков З.Н.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННОГО СИНТЕЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО КЛАСТЕРА

Z.N. Murzabekov

DESIGN OF LIMITED SYNTHESIZING CONTROL FOR NONLINEAR SYSTEM OF ECONOMIC CLUSTER

УДК: 517.977.55

Макалада үч сектордүү экономикалык кластердин математикалык модели үчүн оптималдуу башкаруу маселеси каралат. Квадраттык функционал менен сызыктуу эмес системалар үчүн оптималдуу башкаруу маселелерин чечүүчү алгоритм сунушталган. Кайтарым байланыш принцибинде негизделген башкаруу табылган. Каралып жаткан маселе Лагранждын көбөйтүүчүлөрүн пайдалануу менен чыгарылган, ал синтезделген башкарууну табууга мүмкүндүк берет.

Негизги сөздөр: *үч сектордуу экономикалык кластер, тең салмактуу өсүш, эмгек ресурстары, инвестициялык ресурстар, оптималдуу башкаруу маселеси, Лагранждын көбөйтүүчүлөр ыкмасы, сызыктуу система, квадраттык функционал.*

В статье рассмотрена задача оптимального управления для математической модели трехсекторного экономического кластера. Предложен алгоритм решения задачи оптимального управления для нелинейной системы с квадратичным функционалом. Найдено управление, основанное на принципе обратной связи. Рассматриваемая задача решена с использованием множителей Лагранжа специального вида, что позволяет найти синтезирующее управление.

Ключевые слова: *трехсекторный экономический кластер, сбалансированный рост, трудовые ресурсы, инвестиционные ресурсы, задача оптимального управления, метод множителей Лагранжа, нелинейная система, квадратичный функционал.*

In this article, the optimal control problem for the mathematical model of a three-sector economic cluster is considered. The algorithm for solving the optimal control problem for the nonlinear system with quadratic functional is proposed. The control based on a feedback principle is found. The considered problem is solved using the method of Lagrange multipliers of a special type that allows to find the synthesizing control.

Key words: *three-sector economic cluster, balanced growth, labor resourses, investment resources, optimal control problem, method of Lagrange multipliers, non-linear system, quadratic functional.*

1. Введение.

Вопросы формирования и функционирования кластеров впервые были детально изучены в работах М.Портера [1]. Трехсекторная экономическая модель для оптимального сбалансированного роста экономики приведена в работе А.В. Колемаева [2]. В работе С.М. Асеева и др. [3] рассмотрена математическая теория оптимального управления динамическими системами на бесконечном интервале времени с использованием принципа максимума Понтрягина.

На практике встречается большое количество задач оптимального управления для экономических систем, когда требуется достичь определенного уровня развития экономики на заданном горизонте планирования.

В данной работе предлагается использовать подход, основанный на достаточных условиях оптимальности с использованием множителей Лагранжа специального вида. Этот комбинированный метод позволяет представить искомое управление в виде синтезирующего управления, зависящего от состояния нелинейной системы и текущего момента времени. Кроме того, этот метод дает возможность учесть имеющиеся ограничения на значения управлений. Следует подчеркнуть также, что здесь рассматривается постановка задачи оптимального управления для трехсекторного экономического кластера на конечном интервале времени. В экономической системе одновременно могут изменяться трудовые и инвестиционные ресурсы для всех трех секторов экономики.

2. Трехсекторная экономическая модель кластера.

Рассмотрим задачу оптимального управления для экономической модели кластера, состоящей из трех секторов: $i = 0$ (материальный сектор), $i = 1$ (фондосоздающий сектор), $i = 2$ (потребительский сектор). Предполагается, что в каждом секторе производится свой агрегированный продукт: в материальном секторе – предметы труда (топливо, электроэнергия, сырье и другие материалы); в фондосоздающем секторе – средства труда (машины, оборудование, производственные здания, сооружения и т.д.); в потребительском секторе – предметы потребления.

Рассматриваемая математическая модель состоит из [2]:
а) трех функций удельного выпуска типа Кобба – Дугласа:

$$x_i = \theta_i A_i k_i^{\alpha_i}, \quad A_i > 0, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad (i = 0, 1, 2), \tag{1}$$

б) трех дифференциальных уравнений, описывающих динамику фондовооруженностей:

$$\dot{k}_i = -\lambda_i k_i + (s_i / \theta_i) x_1, \quad k_i(0) = k_i^0, \quad \lambda_i > 0, \quad (i = 0, 1, 2), \tag{2}$$

в) трех балансовых соотношений:

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \quad s_0 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0, \tag{3}$$

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \theta_0 \geq 0, \quad \theta_1 \geq 0, \quad \theta_2 \geq 0, \tag{4}$$

$$(1 - \beta_0) x_0 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \quad \beta_0 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0. \tag{5}$$

Здесь состояние экономической системы (фондовооруженность) описывается вектором (k_0, k_1, k_2), а $(s_0, s_1, s_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2)$ – вектор управлений; (s_0, s_1, s_2) – доли секторов в распределении инвестиционных ресурсов, $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ – доли секторов в распределении трудовых ресурсов; x_i – удельный выпуск (количество выпускаемой продукции в i-м секторе в расчете на одного работающего); β_i – прямые материальные затраты при выпуске продукции в i-м секторе; i = 0, 1, 2. Начальное состояние системы равно (k_0^0, k_1^0, k_2^0), где $k_i^0 = k_i(0)$ – фондовооруженность i-го сектора (i = 0, 1, 2) при $t = 0$. Рассматривается задача перевода нелинейной системы из начального состояния в состояние (k_0^s, k_1^s, k_2^s) за интервал времени $[0, T]$. В качестве желаемого конечного состояния (k_0^s, k_1^s, k_2^s) выбирается состояние равновесия системы, которое определяется путем приравнивания к нулю правых частей дифференциальных уравнений (2):

$$k_1^s = \left(\frac{s_1 A_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}, \quad k_0^s = \frac{s_0 \theta_1 A_1 (k_1^s)^{\alpha_1}}{\lambda_0 \theta_0}, \quad k_2^s = \frac{s_2 \theta_1 A_1 (k_1^s)^{\alpha_1}}{\lambda_2 \theta_2}. \tag{6}$$

Значения фондовооруженностей k_i^s $(i = 0, 1, 2)$ в состоянии равновесия (6) зависят от управлений $(s_0, s_1, s_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2)$, для которых можно выбрать значения $(s_0^s, s_1^s, s_2^s, \theta_0^s, \theta_1^s, \theta_2^s)$, решая задачу нелинейного программирования с целью максимизации удельного потребления: $x_2 \to \max$ [4]

3. Постановка задачи оптимального управления.

Запишем систему дифференциальных уравнений (2) в векторной форме

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + BD(y(t))u(t), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, T], \tag{7}$$

используя следующие обозначения:

$$y_1 = k_1, \quad y_2 = k_2, \quad y_3 = k_0, \quad u_1 = s_1, \quad u_2 = s_2 \theta_1 / \theta_2, \quad u_3 = s_0 \theta_1 / \theta_0,$$

$$f_1(y_1) = y_1^{\alpha_1}, \quad f_2(y_2) = y_2^{\alpha_2}, \quad f_3(y_3) = y_3^{\alpha_0},$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad D(y) = \begin{pmatrix} y_1^{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & y_1^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & y_1^{\alpha_1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Здесь $y=(y_1, y_2, y_3)^*$ означает вектор состояния объекта, $u=(u_1, u_2, u_3)^*$ означает вектор управления. Компоненты вектора управления $u=(u_1, u_2, u_3)^*$ удовлетворяют двусторонним ограничениям следующего вида:

$$\gamma_1 \le u \le \gamma_2, \quad 0<\gamma_{1i} \le u_i \le \gamma_{2i} <1, \quad i=1, 2, 3, \tag{9}$$

которые получаются из исходных ограничений (3), (4).

Требуется найти синтезирующее управление $u(y,t)$, которое переводит систему (7) из заданного начального состояния $y(0)=y^0$ в желаемое состояние равновесия y_s за интервал времени $[0,T]$, минимизируя при этом функционал

$$\begin{aligned} J(u)=\frac{1}{2}\int_0^T[(y(t)-y_s)^*Q(y(t)-y_s)+(D(y)u(t)-D_su_s)^*R(D(y)u(t)-D_su_s)]\,dt+ \\ +\frac{1}{2}(y(T)-y_s)^*F(y(T)-y_s), \end{aligned} \tag{10}$$

где Q – положительно полуопределенная $(n\times n)$-матрица, а R, F, $D(y)$ – положительно определенные матрицы размерности $(n\times n)$, $D_s=D(y_s)$. Символ $(^*)$ означает операцию транспонирования матрицы или вектора.

Отметим, что желаемое конечное состояние системы y_s является равновесным состоянием, в котором максимизируется удельное потребление и обеспечивается сбалансированный рост секторов экономики.

4. Решение задачи оптимального управления.

Для решения поставленной задачи прибавим к выражению для функционала (10) систему дифференциальных уравнений (7) с множителем $\lambda=K(t)(y-y_s)+q(t)$, а также следующее выражение

$$\lambda_1^*(t)D(y)R[\gamma_1-u(t)]+\lambda_2^*(t)D(y)R[u(t)-\gamma_2]+\lambda_3^*(t)[y(t)-y_s-W(t,T)q(t)],$$

где $\lambda_1(t)\ge 0,\ \lambda_2(t)\ge 0$. В результате получим следующий функционал:

$$\begin{aligned} L(y,u)=\int_{t_0}^T\{\frac{1}{2}(y-y_s)^*Q(y-y_s)+\frac{1}{2}(D(y)u-D_su_s)^*R(D(y)u-D_su_s)+ \\ +(K(t)(y-y_s)+q(t))^*(A(y-y_s)+B(D(y)u-D_su_s)-\dot{y})+ \\ +\lambda_1^*(t)D(y)R[\gamma_1-u(t)]+\lambda_2^*(t)D(y)R[u(t)-\gamma_2]+\lambda_3^*(t)[y(t)-y_s-W(t,T)q(t)]\}\,dt+ \\ +\frac{1}{2}(y(T)-y_s)^*F(y(T)-y_s), \end{aligned} \tag{11}$$

где $q(t)$ – вектор размерности $(n\times 1)$; $K(t)$ – симметрическая положительно определенная матрица размерности $(n\times n)$.

Для рассматриваемой задачи принцип освобождения от связей состоит в следующем: исходная задача оптимального управления с ограничениями сводится к другой задаче, но уже без ограничений. При этом новая задача формулируется так, чтобы ее решение являлось бы решением первоначальной задачи [5, 6].

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$v(y,t)=\frac{1}{2}(y-y_s)^*K(t)(y-y_s)+(y-y_s)^*q(t), \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=K(t)(y-y_s)+q(t), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} M(y,u,t)=\frac{1}{2}(y-y_s)^*[Q+\dot{K}(t)](y-y_s)+\frac{1}{2}(D(y)u-D_su_s)^*R(D(y)u-D_su_s)+ \\ +(K(t)(y-y_s)+q(t))^*(A(y-y_s)+B(D(y)u-D_su_s))+(y-y_s)\dot{q}(t)+ \\ +\lambda_1^*(t)D(y)R[\gamma_1-u(t)]+\lambda_2^*(t)D(y)R[u(t)-\gamma_2]+\lambda_3^*(t)[y(t)-y_s-W(t,T)q(t)]. \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда справедливо следующее представление функционала (11)

$$L(y,u)=v(y_0,t_0)+\int_{t_0}^{T}M(y,u,t)dt-v(y(T),T)+\frac{1}{2}(y(T)-y_s)^*F(y(T)-y_s). \qquad (14)$$

Искомое управление определяется из соотношения

$$D(y)u-D_su_s=-R^{-1}B^*(K(t)(y-y_s)+q(t))-D(y)(\lambda_2-\lambda_1), \qquad (15)$$

где матрицы $K(t),\ W(t,T)$ и вектор $q(t)$ удовлетворяют в интервале $t\in[t_0,T]$ дифференциальным уравнениям [6]:

$$\dot K+KA+A^*K-KBR^{-1}B^*K+Q=0,\ K(T)=K_T, \qquad (16)$$

$$\dot W=WA_1^*(t)+A_1(t)W-B_1,\quad W(T,T)=(F-K_T)^{-1}, \qquad (17)$$

$$\dot q=-A_1^*(t)q+W^{-1}(t,T)BD\varphi(y,t),\quad q(T)=(F-K(T))[y(T)-y_s]. \qquad (18)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{gathered} A_1(t)=A-BR^{-1}B^*K(t),\quad B_1=BR^{-1}B^*,\quad \varphi(y,t)=[\lambda_1(y,t)-\lambda_2(y,t)],\\ \lambda_1(x,t)=\max\{0;\gamma_1-\omega(y,t)\}\ge 0,\quad \lambda_2(y,t)=\max\{0;\omega(y,t)-\gamma_2\}\ge 0,\\ \omega(y,t)=D^{-1}(y)[D_su_s-R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)(y-y_s)+q(t))]. \end{gathered} \qquad (19)$$

Пусть существуют решения уравнений (16), (17), тогда дифференциальные уравнения, определяющие закон движения системы, представим в следующем виде:

$$\dot y=A_1(t)(y(t)-y_s)-B_1q(t)+BD(y)\varphi(y,t),\quad y(t_0)=y_0. \qquad (20)$$

Отметим, что начальное условие для дифференциального уравнения (18) определяется из следующего соотношения

$$y(t)-y_s=W(t,T)q(t),\quad t\in[t_0,T]. \qquad (21)$$

Результаты, установленные для задачи оптимального управления, сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема. Пусть Q – положительно полуопределенная матрица, а R , F , $D(y)$ – положительно определенные матрицы в интервале $t_0\le t\le T$; матрица $W_0=W(t_0,T)$ – положительно определена. Предположим, что система (7) является вполне управляемой в момент времени t_0. Тогда для оптимальности пары $(y(t),u(t))$ в задаче (7)-(10), необходимо и достаточно, чтобы:

1) $y(t)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\dot y=A_1(t)(y(t)-y_s)-B_1q(t)+BD(y)\varphi(y,t),\quad y(t_0)=y_0\ ; \qquad (22)$$

2) управление $u(t)$ определяется следующим образом:

$$u(y,t)=D^{-1}(y)[D_su_s-R^{-1}B^*(K(t)(y-y_s)+q(t))]+\varphi(y,t). \qquad (23)$$

Матрицы $K(t),W(t,T)$ являются решениями уравнений (16) и (17), функция $q(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (18), вектор-функция $\varphi(y(t),t)$ определяется по формуле (19).

5. Алгоритм решения задачи оптимального управления.

Опишем удобный для реализации на ПЭВМ алгоритм решения задачи оптимального управления (1)-(5).

1. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (16) и (17) для определения матриц $K(t)$ и $W(t,T)$ в интервале $[t_0,T]$ с условиями $K(T)=K_T$ и $W(T,T)=(F-K(T))^{-1}$.

Необходимо отметить, что K_T – произвольная симметричная положительно определенная $(n\times n)$ –

матрица. При задании различных конечных условий $K(T)=K_T$ для матричного дифференциального уравнения (16) получаем различные матрицы $K(t)$ и $W(t,T)$. Однако при этом получается одна и та же вектор-функция $u(y,t)$ вида (23), поскольку задача имеет единственное решение. При вычислении вектор-функции $q(t)$ по формуле (18) происходит компенсация влияния матрицы $K(t)$.

2. Задать условия $y(t_0)=y_0,\ y_s$ и вычислить $q(t_0)=W^{-1}(t_0,T)(y(t_0)-y_s)$.

3. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (18), (20) в интервале $[t_0,T]$ при начальных условиях $y(t_0)=y_0,\ q(t_0)=W^{-1}(t_0,T)(y(t_0)-y_s)$. В процессе интегрирования системы (18) и (20) на печать необходимо выдать график оптимальной траектории $y(t)$ и оптимального управления $u(t)$.

4. Пусть найдено состояние системы и оптимальное управление, тогда

$$f_i(y_i)=(y_i)^{\alpha_i},\quad v=\frac{\beta_1A_1f_1(y_1)+\beta_2A_2f_2(y_2)(1-u_1)/u_2}{(1-\beta_0)A_0f_3(y_3)(1-u_1)/u_3+\beta_2A_2f_2(y_2)(1-u_1)/u_2} \tag{24}$$

обеспечивают выполнение условия (5);

$$s_1=u_1,\quad s_2=(1-v)(1-u_1),\quad s_0=v(1-u_1) \tag{25}$$

обеспечивают выполнение условия (3);

$$\theta_1=\frac{1}{1+s_0/u_3+s_2/u_2},\quad \theta_2=\frac{(1-v)(1-s_1)\theta_1}{u_2},\quad \theta_0=\frac{v(1-s_1)\theta_1}{u_3} \tag{26}$$

обеспечивают выполнение условия (4).

6. Выводы.

Разработан алгоритм решения поставленной задачи и найдено управление, основанное по принципу обратной связи. Задача решена с использованием множителей Лагранжа специального вида. Управляющие параметры (24) - (26) выбираются таким образом, чтобы были выполнены ограничения на управления (3), (4) и балансовое соотношение (5).

Литература:

1. Портер М.Э. Конкуренция. - М.: Изд. дом. Вильямс, 2005. - 608 с.
2. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. - М.: Юнити-Дана, 2005. – 295 с.
3. Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжимский А.В. Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи математических наук. - 2012. - Т. 67, № 2 (404). - С. 3-64.
4. Murzabekov Z., Milosz M., Tussupova K. Modeling and optimization of the production cluster // Information systems architecture and technology: Proceedings of 36th International conference on information systems architecture and technology – ISAT 2015. - Part II. - Advances in intelligent systems and computing. - Vol. 430. - P. 99-108. - Switzerland: Springer International Publishing, 2016.
5. Мурзабеков З.Н. Достаточные условия оптимальности динамических систем управления с закрепленными концами // Математический журнал. - 2004. - Т. 4, № 2. - С. 52-59.
6. Aipanov Sh.A., Murzabekov Z.N. Analytical solution of a linear quadratic optimal control problem with control value constraints // Journal of Computer and Systems Sciences International, – 2014. – Vol. 53, No. 1. – P. 84-91.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Абдылдаева Э.