Сартабанов Ж.А.

КЕЧИКТИРИЛГЕН АРГУМЕНТИ БАР КЭЭ БИР СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН МЕЗГИЛДИК ЖАНА КӨП МЕЗГИЛДИК ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ

Сартабанов Ж.А.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ АРГУМЕНТАМИ

J.A. Sartabanov

PERIODIC AND MULTIPERIODIC SOLUTIONS OF SOME LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAYED ARGUMENTS

УДК: 517.947

Макалада мезгилдик коэффициентти жана туруктуу кечиктирүү аргументи бар кадимки дифференциалдык теңдемелер системасынын жалгыз мезгилдик чыгарылышынын жаңы интегралдык идеясы келтирилген жана жашашынын жетишерлик шарты алынган. Андан тышкары, бул жыйынтыктар, көп мезгилдүү болгон учурда көз каранды эмес өзгөрмөлөрдүн мейкиндигин кайчылаш катар дифференцирлөө оператору менен жекече туундудагы теңдемелерге жайылтылган. Натыйжа катары квази мезгилдүү болгон учурга натыйжалар алынган.

***Негизги сөздөр**: дифференциалдык теңдеме, туруктуу кечиктирүү, мезгилдик, көп мезгилдик, квази мезгилдик чыгарылыш.*

В статье получены достаточные условия существования и приведено новое интегральное представление единственного периодического решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянным запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами. Далее, эти результаты распространены для многопериодического случая уравнений в частных производных с оператором дифференцирования вдоль диагонали пространства независимых переменных. Как следствие получены результаты для квазипериодического случая.

***Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, постоянное запаздывание, периодическое, многопериодическое, квазипериодическое решение.*

The article received the sufficient conditions for existence and presented a new integral representation of the unique periodic solution of a system of ordinary differential equations with a constant retarded argument and periodic coefficients. Further, these results are extended for the multi-periodic case of partial differential equations with the differentiation operator along the diagonal of the space of independent variables. As a corollary, the results are obtained for the quasiperiodic case.

***Key words**: differential equation, constant delay, periodic, multiperiodic, quasiperiodic solution.*

1. Периодическое решение линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Исследуем задачу о существовании $\theta-$ периодического решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений аргумента с запаздыванием $\Delta = const$ из промежутка $(0,\theta)$, которая имеет вид

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = A(\tau)x(\tau) + B(\tau)x(\tau-\Delta) + f(\tau), \quad (1.1)$$

с искомой n −вектор-функцией $x(\tau)$ и заданными $n\times n-$ матрицами

$$A(\tau+\theta) = A(\tau) \in C(R), B(\tau+\theta) = B(\tau) \in C(R) \quad (1.2)$$

и n -вектор-функцией

$$f(\tau+\theta) = f(\tau) \in C(R) \quad (1.3)$$

при $\tau \in R = (-\infty, +\infty)$, где $C(R)$-класс непрерывных в R −функций.

Определяются матрицы $Y(\tau), Z(\tau)$ и $X(\tau)$ следующими выражениями

$$Y(\tau) = E + \int_0^\tau A(\tau)Y(\tau)d\tau, \quad (1.4)$$

$$Z(\tau) = E + \int_{-\Delta}^{\tau-\Delta} Y^{-1}(\tau+\Delta)B(\tau+\Delta)Y(\tau)Z(\tau)d\tau, \quad (1.5)$$

$$X(\tau) = Y(\tau)Z(\tau), \quad (1.6)$$

где E −единичная $n\times n$- матрица.

Очевидно, что в силу (1.2) и (1.4)-(1.6) имеем

$$x(\tau, s) = X(\tau)X^{-1}(s)u(s) \tag{1.7}$$

- решение однородной системы, соответствующей системе (1.1), удовлетворяют её начальному условию

$$x(s, s) = u(s) = u(s+\theta) \in C^{(1)}(R), \tag{1.1_0}$$

где $C^{(1)}(R)$- класс гладких в R функций. Предложим выполненными условия

$$|X(\tau)X^{-1}(s)| \leq \Gamma e^{-\gamma(\tau-s)}, \tau > s \tag{1.8}$$

$$g = \Gamma \|\mathrm{B}\| \Delta < 1 \tag{1.9}$$

с постоянными $\gamma > 0, \Gamma > 0$, норма $\|\mathrm{B}\|$ определена максимумом по τ евклидовой нормы $|\mathrm{B}(\tau)|$ матрицы $\mathrm{B}(\tau)$.

При условиях (1.2), (1.3) и (1.8) и (1.9) имеем решение

$$x(\tau, s) = X(\tau)X^{(-1)}(s)u(s) + X(\tau)X^{(-1)}(s)\vartheta(\tau, s) \tag{1.10}$$

задачи (1.1) - (1.1_0), где

$$\vartheta(\tau, s) = \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j \int_s^{\tau} G(\tau_j, s) \int_{\tau_j-\Delta}^{\tau_j} G(\tau_{j-1}, s) \ldots \int_{\tau_2-\Delta}^{\tau_2} G(\tau_1, s) \int_{\tau_1-\Delta}^{\tau_1} g(\tau_0, s) d\tau_0 \ldots d\tau_j, \tag{1.11}$$

$$g(\tau, s) = X(s)X^{-1}(\tau)f(\tau), G(\tau, s) = X(s)X(\tau)\mathrm{B}(\tau)X^{-1}(\mathrm{s}).$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. При условиях (1.2), (1.3), (1.8) и (1.9)система (1.1)имеет единственное $\boldsymbol{\theta}$ – периодическое решение

$$\boldsymbol{x^*(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} X(\tau)X^{-1}(s)\vartheta(\tau, s)ds.} \tag{1.12}$$

Приведенное представление (1.12) обосновано на основе (1.10) и (1.11). Единственность доказывается в силу условия (1.8). Условия (1.9) обеспечивает существование функции (1.11). Гладкость и периодичность решения следуют из условий (1.2) и (1.3).

2. Многопериодическое решение линейной системы уравнений с оператором дифференцирования по главной диагонали пространства независимых переменных и запаздывающими аргументами.

Рассмотрим систему уравнений

$$\mathcal{D}x(\tau,\ t) = P(\tau,\ t)x(\tau,\ t) + Q(\tau,\ t)x(\tau-\Delta, t-e\Delta) + f(\tau,\ t) \tag{2.1}$$

с оператором $D = \frac{\partial}{\partial \tau} + < e, \frac{\partial}{\partial \tau} >,\ e = (\tau, \ldots, \tau) - m$ –вектор,

$\tau \in R = (-\infty, \quad + \quad \infty),\ t = (t_1, \ldots, t_m \quad) \quad \in R \times \ldots \times R = R^m,\ \frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_m}\right)$ -вектор-оператор дифференцирования, где $x(\tau,\ t)$ –искомая n –векторная функция, $P(\tau,\ t)$ и $Q(\tau,\ t)$ – задание $n\ x\ n$ –матричные функции:

$$P(\tau+\theta,\ t+k\omega) = P(\tau,\ t) \in C_{\tau,t}^{(o,e)}(R \times R^m),\ Q(\tau+\theta,\ t+k\omega) \ = Q(\tau,\ t) \in C_{\tau,t}^{(o,e)}(R \times R^m),\ k \in Z^m \tag{2.2}$$

и $f(\tau,\ t)$ – n-векторная функция:

$$f(\tau+\theta,\ t+k\omega) = f(\tau,\ t) \in\ C_{\tau,t}^{(o,e)}(R \times R^m),\ k \in Z^m, \tag{2.3}$$

$\omega_0 = \theta, \omega_1, \ldots, \omega_m$ –положительные постоянные, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ вектор-период $k = (k_1, \ldots k_m) \in Z \times \ldots \times Z = Z^m, Z\ -$ множество целых чисел, $k\omega = (k_1\omega_1, \ldots, k_m\omega_m)$-кратные вектор-периоды. $C_{\tau,t}^{(o,e)}(R \times R^m)$ – класс функций непреривных в $R \times R^m$ и гладких по $t \in R^m$.

Задача замекти заключается в исследовании $(\theta,\ \omega)$ – периодических по $(\tau,\ t)$ решений системы (2.1).

Интегральными управлениями

$$\mathrm{Y}(\tau,\ t) = E + \int_0^{\tau} P(s,\ t-e\tau+es)ds \tag{2.4}$$

$$Z\ (\tau,\ t) = E + \int_{-\Delta}^{\tau-\Delta} Y^{-1}(s+\Delta,\ t-e\tau+es+e\Delta) \times B$$

$$(s+\Delta,\ t-e\tau+es+e\Delta)Y(s,\ t-e\tau+es)Z(s,\ t-e\tau+es)ds \qquad (2.5)$$

определив матрицы $Y(\tau,\ t)$ и $Z(\tau,\ t)$, выражением

$$X(\tau,\ t)=Y(\tau,\ t)Z(\tau,\ t) \qquad (2.6)$$

имеем матрицант $X(\tau,\ t)$ системы (1), где E –единичная $n\ \times n$ – матрица.

Для решения поставленный задачи достаточно ограничиваться решениями $x(\tau,\ t,\ s,\ t-et+es)$ с начальным условием вида

$$x(\tau,t,s,\mathrm{t}-\mathrm{e}\tau+\mathrm{es})|_{\tau=s}=u(s,t)=$$
$$=u(s_i+\theta,t+k\omega)\in\ C_{s,t}{}^{(o,e)}(R\times R^m),\quad k\in Z^m, \qquad (2.1_0)$$

Выражение

$$x(\tau,t,s,t-e\tau+es)=X(\tau,t)X^{-1}(s,t-e\tau+es)u(s,t-e\tau+es) \qquad (2.7)$$

предствляет решение однородной системы, соответстующей системе (2.1), которые может быть обосновано на основе условий (2.2), (2.3) и соотношений (2.4)-(2.6).

Предположим выполненными условия

$$|X(\tau,\ t,)X^{-1}(s,\ t-e\tau+es)|\le\Gamma e^{-\gamma(\tau-s)},\tau>s, \qquad (2.8)$$

$$q=\Gamma\parallel B\parallel\Delta<1, \qquad (2.9)$$

где $|\cdot|$ -знак евклидовой нормы, $\parallel\cdot\parallel$ -норма, полученная максимизацией по (τ,t) евклидовой нормы функции, Γ и γ –положительные постоянные.

Соотношениями

$$G(\tau,t,s,t-e\tau+es)=$$
$$=X(s,t-e\tau+es)X^{-1}(\tau,t)Q(\tau,t)X(\tau-\Delta,t-e\Delta)\times$$

$$\times X^{-1}(s,t-e\tau+es),g(\tau,t,s,t-e\tau+es)=X(s,t-e\tau+es)X^{-1}(\tau,t)f(\tau,t)$$

определим функцию

$$v(\tau,t,s,t-e\tau+es)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\int_s^{\tau}G(\sigma_j,\ t-e\tau+e\sigma_j,s,\ t-e\tau+es)\times$$
$$\times\int_{\sigma_j-\Delta}^{\sigma_j}G\big(\sigma_{j-1},\ t-e\tau+e\sigma_{j-1},\ s,\ t-e\tau+es\big)\dots$$
$$\dots\int_{\sigma_2-\Delta}^{\sigma_2}G(\sigma_1,t-e\tau+e\sigma_1,s,t-e\tau+es)\times$$
$$\times\int_{\sigma_1-\Delta}^{\sigma_1}g(\sigma_0,\ t-e\tau+e\sigma_0,\ s,\ t-e\tau+es)d\sigma_0\dots d\sigma_j. \qquad (2.10)$$

$$x(\tau,t,s,e\tau+es)=X(\tau,t)X^{-1}(s,t-e\tau+es)u(s,t-e\tau+es)+$$
$$+X(\tau,t)X^{-1}(s,t-e\tau+es)v(\tau,t,s,t-e\tau+es) \qquad (2.11)$$

представляет собой решение задачи (2.1) – (2.1_0), которое выводится на основе условий (2.2), (2.3), (2.8), (2.9) и функии (2.10).

В заключение, получено (θ,ω) –периодическое по $(\tau,\ t)$ решение $x^*(\tau,t)$ системы (2.1) формулой

$$x^*(\tau,t)=\int_{-\infty}^{\tau}X(\tau,t)X^{-1}(s,t-e\tau+es)v(\tau,t,s,t-e\tau+es)ds. \qquad (2.12)$$

Таким образом, доказана теорема

Теорема 2. Пусть выполнены условия (2.2), (2.3), (2.8) и (2.9). Тогда система уравнений (2.1) имеет единственные $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega})$ – периодическое решение $\boldsymbol{x^*(\tau, t)}$, представляемые формулой (2.12).

Теорема доказывается на основе выбора начальной функии $u(s,t)$ в соотношении (2.11) и условий (2.2), (2.3), (2.8) и (2.9).

В заключении приводим следствие теоремы 2.

Следствие. *При условиях теоремы 2 линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и квазипериодическими коэффициентами вида*

$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = P(\tau, e\tau)\xi(\tau) + Q(\tau, e\tau)\xi(\tau - \Delta) + f(\tau, e\tau), \tag{2.13}$$

допускает единственное квазипериодическое решение с тем частотным базисом, что система (2.13), которое имеет интегральное представление

$$\xi^*(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} X(\tau, e\tau) X^{-1}(s, es) v(\tau, e\tau, s, es) ds \tag{2.14}$$

Следствие доказывается на основе теоремы Бора о связи квазипериодических функций от одной переменной и периодических функций от многих переменных путем перехода от системы (2.1) и её многопериодического решения (2.12) к характеристике $t = e\tau$ дифференциального оператора $\mathcal{D}$.

Основные результаты данной работы получены на основе классической теории по обыкновенным дифференциальным уравнениям и методов [1-3] распространения некоторых идей их периодических решений на случай многопериодических решений систем уравнений в частных производных с оператором дифференцирования $\mathcal{D}$ по направлению главной диагонали пространства независимых переменных $(\tau, t) \in R \times R^m$.

Литература:

1. Умбетжанов Д.У., Сартабанов Ж.А. О многопериодическом решении одной системы уравнений в частных производных с постоянными запаздываниями. - Известия АН КазССР. -Серия физико-математическая, №5, 1976, 48-52 стр.
2. Сартабанов Ж.А., Турганбаев А.А. Существование и многопериодичность решений систем D_a – уравнений с отклоняющимися аргументами. - Научный журнал МОиН РК, Поиск, 2000, №6, 174-179 стр.
3. Сартабанов Ж.А., Турганбаев А.А. Многопериодические решения линейных систем *D* - уравнений с постоянным запаздыванием. МОН РК; КарГТУ, КарФАЕН, КарФИАН, ЦКОМАЙ Труды международной научной конф. «Наука и образов. ведущий фактор стратегии «Казахстан-2030», посвященной 10-летию независимости Казахстана». - Караганда, 2001. 43-45 стр.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Абдылдаева Э.