Керимбеков А., Соколов К.В.

ЧЕКТИК БАШКАРУУСУ БАР СИНТЕЗДИН СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ОПТИМАЛДАШТЫРУУ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Керимбеков А., Соколов К.В.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕНОЙ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА ПРИ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ

A. Kerimbekov, K.V. Sokolov

SOLVING ONE NONLINEAR SYNTHESIS OPTIMIZATION PROBLEM OF WARM PROCESS WITH BORDER CONTROL

УДК: 517.977

Чектик башкаруу үчүн Егоровдун ыкмасы менен алынган Коши-Беллман-Егоров маселесинин чыгарылышын алуу тапшырмасы коюлат.

Негизги сөздөр: *башкаруу, синтез, чектик маселе, чектик башкаруу.*

Ставится задача получить решение задачи Коши-Беллмана-Егорова, полученной по методике Егорова для случая граничного управления.

Ключевые слова: *управление, синтез, краевая задача, граничное управление.*

The problem is to obtain a solution of the Cauchy-Bellman-Egorov problem obtained by the Egorov method for the case of boundary control

Key words: *control, synthesis, boundary value problem, boundary control.*

В теории оптимального управления одной из интересных задач для изучения и исследования является задача синтеза оптимальных управлений, которая чрезвычайно сложна, и полное решение которой удается получить лишь в редких случаях.

Трудности использования общих необходимых условий оптимальности приводят к необходимости выделения конкретных классов задач, для которых оказывается возможным эффективное построение решения. Нелинейные задачи синтеза представляют собой один из таких классов.

Рассмотрим нелинейную краевую задачу параболического типа

$$\begin{cases} V_t(t,x) = V_{xx}(t,x) + g(t,x), \quad 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le 1, \\ V(0,x) = \psi(x), \\ V_x(t,0) = 0,\ V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = p[t,u(t)] \end{cases} \tag{1}$$

имеющую обобщенное решение вида:

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} \left(g_n(\tau) + X_n(1) p[\tau,u(\tau)] \right) d\tau \right] X_n(x) \tag{2}$$

также рассмотрим функционал качества

$$I[u(t)] = \int_0^1 [V(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T q[t,u(t)]dt,\ \ \beta > 0,\ \ |u(t)| \le 1 \tag{3}$$

В соответствии с принципом оптимальности Беллмана, для функционала (3) строится функционал Беллмана

$$S[t,V(t,x)] = \min_{|u(t)|\le 1} \left\{ \int_0^1 [V(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_t^T q[\tau,u(\tau)]d\tau \right\} \tag{4}$$

По методике А. И. Егорова [1], для (4) получаем задачу Коши-Беллмана-Егорова вида:

$$-\frac{\partial S[t,V]}{\partial t}=\min_{|u(t)|\le 1}\left\{\beta(q[t,u(t)])+\int_0^1\left[V(t,x)(W_t(t,x)+W_{xx}(t,x))+g(t,x)W(t,x)\right]dx+\right. \quad (5)$$

$$\left.+W(t,1)p[t,u(t)]\right\}$$

с «начальным» условием

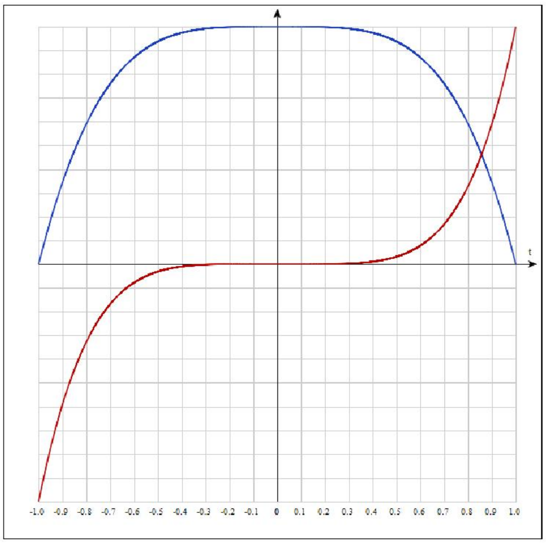
$$S[T,V]=\int_0^1\left[V(T,x)-\xi(x)\right]^2 dx \quad (6)$$

Избавимся в правой части уравнения (5) от знака $\min$. Для того, чтобы выражение в правой части достигало минимума, необходимо минимизировать все слагаемые, зависящие от $u(t)$. То есть, правая часть будет достигать минимума, если следующее выражение достигает минимум

$$\beta q(t,u(t))+p(t,u(t))W(t,1)\xrightarrow[|u(t)|\le 1]{}\min \quad (7)$$

где $W(t,1)$ - градиент функционала $S[t,V]$

Рассмотрим случай, когда $q(t,u(t))=1-u^{2n}(t)$, $p(t,u(t))=u^{2n-1}(t)$. Искать минимум выражения (7) будем графическим способом. Здесь неизвестным множителем является $W(t,1)$. На графике рассмотрим 2 случая, когда $W(t,1)>0$ и $W(t,1)<0$



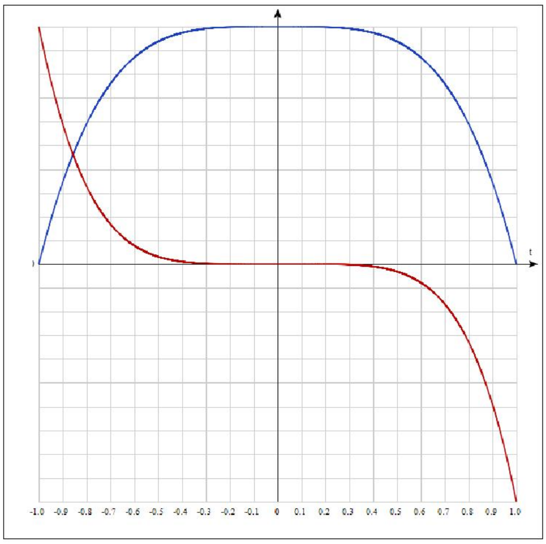


Рис. 1.

Для случая $W(t,1)>0$ минимум достигается при $u(t)=-1$. Для случая $W(t,1)<0$ минимум достигается при $u(t)=1$.

Для случая $W(t,1)>0$ имеем уравнение Беллмана-Егорова

$$-\frac{\partial S[t,V]}{\partial t}=\int_0^1\left[V(t,x)\big(W_t(t,x)+W_{xx}(t,x)\big)+g(t,x)W(t,x)\right]dx-W(t,1) \quad (8)$$

Решение данного уравнения будем искать в виде

$$S[t,V]=\int_0^1\int_0^1 V(t,x)R(t,x,y)V(t,y)dydx+\int_0^1 V(t,x)k(t,x)dx+\eta(t) \quad (9)$$

где $R(t,x,y)$, $k(t,x)$, $\eta(t)$ - неизвестные функции. Из (9) найдем приращение $\Delta S\left[t,V\right]$

$$\Delta S[t,V]=S[t,V+\Delta V]-S[t,V]=\int_0^1\int_0^1\big(V(t,x)+\Delta V(t,x)\big)R(t,x,y)\big(V(t,y)+\Delta V(t,y)\big)dydx+$$

$$+\int_0^1\big(V(t,x)+\Delta V(t,x)\big)k(t,x)dx-\eta(t)-\int_0^1\int_0^1 V(t,x)R(t,x,y)V(t,y)dydx-\int_0^1 V(t,x)k(t,x)dx-\eta(t)$$

$$\Delta S[t,V]=\int_0^1\int_0^1 \Delta V(t,x)R(t,x,y)V(t,y)dydx+\int_0^1\int_0^1 V(t,x)R(t,x,y)\Delta V(t,y)dydx+$$

$$+\int_0^1\int_0^1 \Delta V(t,x)R(t,x,y)\Delta V(t,y)dydx+\int_0^1 \Delta V(t,x)k(t,x)dx$$

$$\Delta S[t,V]=\int_0^1 \Delta V(t,x)\left(\int_0^1 [R(t,x,y+R(t,y,x))]V(t,y)dy+k(t,x)\right)dx \tag{10}$$

Из (10), используя определение дифференциала Фреше, имеем

$$W(t,x)=\int_0^1 [R(t,x,y+R(t,y,x))]V(t,y)dy+k(t,x) \tag{11}$$

Перейдем к матричной форме записи уравнений (8) – (11), используя разложение в ряд Фурье следующих функций.

$$g(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)X_n(x)=G^*(t)X(x)=X^*(x)G(t)$$

$$k(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} k_n(t)X_n(x)=K^*(t)X(x)=X^*(x)K(t)$$

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)=V^*(t)X(x)=X^*(x)V(t)$$

$$R(t,x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} R_n(t,y)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} X_n(x)p_{kn}(t)X_k(y)=X^*(x)P(t)X(y)$$

При этом следует заметить что $\int_0^1 X^*(x)X(x)dx=1$ и $\int_0^1 X(x)X^*(x)dx=E$, где E - единичная матрица.

$$\begin{aligned}W(t,x)&=\int_0^1\left[X^*(x)P(t)X(y)+X^*(y)P(t)X(x)\right]X(y)V(t)dy+X^*(x)K(t)=\\&=X^*(x)\left[P(t)+P^*(t)\right]V(t)+X^*(x)K(t)\end{aligned} \tag{11*}$$

$$W_t(t,x)=\frac{\partial W\left[t,x,V\right]}{\partial t}=X^*(x)\left[\dot P(t)+\dot P^*(t)\right]V(t)+X^*(x)\dot K(t) \tag{12}$$

С учетом (9)-(12), перепишем (8) в матричном виде

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=\int_0^1\left[V^*(t)X(x)\left[X^*(x)\left(\left(\dot P(t)+\dot P^*(t)\right)V(t)+\dot K(t)\right)+\left(X^*(x)\right)''\left(\left(P(t)+P^*(t)\right)V(t)+K(t)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+G^*(t)X(x)X^*(x)\left(\left(P(t)+P^*(t)\right)V(t)+K(t)\right)\right]dx-X^*(1)\left[\left(P(t)+P^*(t)\right)V(t)+K(t)\right]$$

Исходя из того, что $X''_n(x)=-\lambda_n^2 X_n(x)$, следует

$$\left(X^*(x)\right)''=\begin{pmatrix}-\lambda_1^2X_1(x)\\-\lambda_2^2X_2(x)\\\dots\\-\lambda_n^2X_n(x)\\\dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda_1^2&0&\dots&0&\dots\\0&-\lambda_2^2&\dots&0&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&-\lambda_n^2&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1(x)&X_2(x)&\dots&X_n(x)&\dots\end{pmatrix}=$$

$$=LX(x)=X^*(x)L$$

Тогда (8) перепишем в виде:

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=V^*(t)\left(\dot{P}(t)+\dot{P}^*(t)\right)V(t)+V^*(t)\dot{K}(t)+V^*(t)L\left(P(t)+P^*(t)\right)V(t)+V^*(t)LK(t)+$$
$$+G^*(t)\left(P(t)+P^*(t)\right)V(t)+G^*(t)K(t)-X^*(1)\left(P(t)+P^*(t)\right)V(t)-X^*(1)K(t)$$

Сгруппируем правую часть относительно $V(t)$, получим

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=V^*(t)\Big[\left(\dot{P}(t)+\dot{P}^*(t)\right)+L\left(P(t)+P^*(t)\right)\Big]V(t)+\Big[G^*(t)K(t)-X^*(1)K(t)\Big]+$$
$$+V^*(t)\Big[\dot{K}(t)+LK(t)+\left(P(t)+P^*(t)\right)G^*(t)-\left(P(t)+P^*(t)\right)X(1)\Big] \tag{13}$$

Запишем (9) в матричном виде

$$S[t,V]=V^*(t)P(t)V(t)+V^*(t)K(t)+\eta(t) \tag{9*}$$

Возьмем частную производную по t от (9*)

$$\frac{\partial S}{\partial t}=V^*(t)\dot{P}(t)V(t)+V^*(t)\dot{K}(t)+\dot{\eta}(t) \tag{14}$$

Приравнивая правые части (с учетом знаков) (13) и (14), получаем 3 группы дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций

$$-2P'(t)-\left(P^*(t)\right)'=L\left(P(t)+P^*(t)\right) \tag{15}$$

$$-2K'(t)=\left(P(t)+P^*(t)\right)G(t)-\left(P(t)+P^*(t)\right)X(1)+LK(t) \tag{16}$$

$$-\eta'(t)=G^*(t)K(t)-X^*(1)K(t) \tag{17}$$

Найдем «начальные» условия из (6)

$$S[T,V]=\int_0^1\left[V(T,x)-\xi(x)\right]^2dx=\int_0^1\left[V^2(T,x)-2V(T,x)\xi(x)+\xi^2(x)\right]dx=$$
$$=V^*(T)EV(T)-2V^*(T)\xi+\xi^*\xi=V^*(T)P(T)V(T)+V^*(T)K(T)+\eta(T)$$

Приравнивая множители относительно $V(t)$, получаем «начальные» условия

$$P(T)=E \tag{18}$$

$$K(T)=-2\xi \tag{19}$$

$$\eta(T)=\xi^2 \tag{20}$$

Найдем решение уравнения (15) с «начальными» условиями (18). Для этого Перепишем (15) в матричном виде

$$-2\begin{pmatrix} p'_{11}(t) & p'_{12}(t) & \dots & p'_{1n}(t) & \dots \\ p'_{21}(t) & p'_{22}(t) & \dots & p'_{2n}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p'_{n1}(t) & p'_{n2}(t) & \dots & p'_{nn}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} p'_{11}(t) & p'_{21}(t) & \dots & p'_{n1}(t) & \dots \\ p'_{12}(t) & p'_{22}(t) & \dots & p'_{n2}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p'_{1n}(t) & p'_{2n}(t) & \dots & p'_{nn}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -\lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_2^2 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_n^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) & \dots \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2n}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \dots & p_{nn}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_2^2 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_n^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{21}(t) & \dots & p_{n1}(t) & \dots \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{n2}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1n}(t) & p_{2n}(t) & \dots & p_{nn}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3p'_{11}(t) & -2p'_{12}(t)-p'_{21}(t) & \dots & -2p'_{1n}(t)-p'_{n1}(t) & \dots \\ -2p'_{21}(t)-p'_{12}(t) & -3p'_{22}(t) & \dots & -2p'_{2n}(t)-p'_{n2}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2p'_{n1}(t)-p'_{1n}(t) & -2p'_{n2}(t)-p'_{2n}(t) & \dots & -3p'_{nn}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\lambda_1^2 p_{11}(t) & -\lambda_1^2\left(p_{12}(t)+p_{21}(t)\right) & \dots & -\lambda_1^2\left(p_{1n}(t)+p_{n1}(t)\right) & \dots \\ -\lambda_2^2\left(p_{21}(t)+p_{12}(t)\right) & -2\lambda_2^2 p_{22}(t) & \dots & -\lambda_2^2\left(p_{2n}(t)+p_{n2}(t)\right) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda_n^2\left(p_{n1}(t)+p_{1n}(t)\right) & -\lambda_n^2\left(p_{n2}(t)+p_{2n}(t)\right) & \dots & -2\lambda_n^2 p_{nn}(t) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$2p'_{ij}(t)+p_{ji}(t)=\lambda_i^2\left(p_{ij}(t)+p_{ji}(t)\right) \qquad (21)$$

Из (21) получаем 2 группы уравнений – при $i=j$ и $i\neq j$

При $i=j$, получаем следующую задачу Коши

$$\begin{aligned} &p'_{ii}(t)=\frac{2}{3}\lambda_i^2 p_{ii}(t) \\ &p_{ii}(T)=1 \end{aligned} \qquad (22)$$

Решая задачу (22), имеем

$$p_{ii}(t)=e^{\frac{2}{3}\lambda_i^2(t-T)} \qquad (23)$$

В случае $i\neq j$, будем рассматривать бесконечное множество из двух систем дифференциальных уравнений, находящихся вне диагонали матрицы и находящиеся симметрично по отношению друг к другу относительно диагонали.

$$\begin{cases} 2p'_{ij}(t)+p'_{ji}(t)=\lambda_i^2\left(p_{ij}(t)+p_{ji}(t)\right) \\ 2p'_{ji}(t)+p'_{ij}(t)=\lambda_j^2\left(p_{ji}(t)+p_{ij}(t)\right) \\ p_{ij}(T)=0;\ \ p_{ji}(T)=0 \end{cases} \qquad (24)$$

Решая данную систему дифференциальных уравнений, получаем

$$p_{ij}(t)=0;\ i\neq j \qquad (25)$$

Получили следующую матрицу $P(t)$

$$P(t)=\begin{pmatrix} e^{\frac{2}{3}\lambda_1^2(t-T)} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & e^{\frac{2}{3}\lambda_2^2(t-T)} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\frac{2}{3}\lambda_n^2(t-T)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \qquad (26)$$

Перейдем к решению бесконечномерной системы ДУ (16) с «начальными» условиями (19). Учитывая (26), перепишем (16) в виде

$$-2K'(t)=2P(t)\left(G(t)-X(1)\right)+LK(t)$$

Запишем это уравнение в матричном виде

$$\begin{pmatrix} -2k_1'(t) \\ -2k_2'(t) \\ \dots \\ -2k_n'(t) \\ \dots \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} e^{\frac{2}{3}\lambda_1^2(t-T)} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & e^{\frac{2}{3}\lambda_2^2(t-T)} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\frac{2}{3}\lambda_n^2(t-T)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1(t)-X_1(1) \\ g_2(t)-X_2(1) \\ \dots \\ g_n(t)-X_n(1) \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1^2 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_1^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ \dots \\ k_n(t) \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2k_1'(t) \\ -2k_2'(t) \\ \dots \\ -2k_n'(t) \\ \dots \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} (g_1(t)-X_1(1))e^{\frac{2}{3}\lambda_1^2(t-T)} \\ (g_2(t)-X_2(1))e^{\frac{2}{3}\lambda_2^2(t-T)} \\ \dots \\ (g_n(t)-X_n(1))e^{\frac{2}{3}\lambda_n^2(t-T)} \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_1^2 k_1(t) \\ -\lambda_2^2 k_2(t) \\ \dots \\ -\lambda_n^2 k_n(t) \\ \dots \end{pmatrix}$$

Для получения решения данной системы уравнений, необходимо получить решение для i-го уравнения данной системы, т.к. уравнения, входящие в эту систему независимы.

$$-2k_i'(t) = 2(g_1(t)-X_1(1))e^{\frac{2}{3}\lambda_1^2(t-T)} - \lambda_i^2 k_i(t) \tag{27}$$

Из (19) получаем «начальные» условия для данного уравнения

$$k_i(T) = -2\xi_i \tag{28}$$

Полученное уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решая его, получим

$$k_i(t) = e^{\frac{1}{2}\lambda_i^2 t}\int_t^T \left(g_i(\tau)-X_i(1)\right)e^{\frac{1}{6}\lambda_i^2\tau-\frac{2}{3}\lambda_i^2 T}d\tau - 2\xi_i \tag{29}$$

Получим решение дифференциального уравнения (17) с «начальным» условием (20). Для этого перепишем (17) в матричной форме

$$-\eta'(t) = \left(\begin{pmatrix} g_1(t) & g_2(t) & \dots & g_n(t) & \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1(1) & X_2(1) & \dots & X_n(1) & \dots \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ \dots \\ k_n(t) \\ \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(g_i(t)-X_i(1)\right)k_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(g_i(t)-X_i(1)\right)\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i^2 t}\int_t^T \left(g_i(\tau)-X_i(1)\right)e^{\lambda_i^2\left(\frac{1}{6}\tau-\frac{2}{3}T\right)}d\tau - 2\xi_i\right]$$

$$\eta(t) = -\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t \left(g_i(\tau)-X_i(1)\right)\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i^2\tau}\int_\tau^T \left(g_i(s)-X_i(1)\right)e^{\lambda_i^2\left(\frac{1}{6}s-\frac{2}{3}T\right)}ds - 2\xi_i\right]d\tau + C$$

$$\eta(T) = -\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^T \left(g_i(\tau)-X_i(1)\right)\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i^2\tau}\int_\tau^T \left(g_i(s)-X_i(1)\right)e^{\lambda_i^2\left(\frac{1}{6}s-\frac{2}{3}T\right)}ds - 2\xi_i\right]d\tau + C = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2$$

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\int_t^T \left(g_i(\tau)-X_i(1)\right)\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i^2\tau}\int_\tau^T \left(g_i(s)-X_i(1)\right)e^{\lambda_i^2\left(\frac{1}{6}s-\frac{2}{3}T\right)}ds - 2\xi_i\right]d\tau + \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2 \tag{30}$$

Используя (26), (29) и (30), из (9*) найдем $S[t,V]$.

$$S[t,V]=\sum_{i=1}^{\infty}V_i^2(t)e^{\frac{2}{3}\lambda_i^2(t-T)}+\sum_{i=1}^{\infty}V_i(t)\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i^2 t}\int_t^T\big(g_i(\tau)-X_i(1)\big)e^{\lambda_i^2\left(\frac{1}{6}\tau-\frac{2}{3}T\right)}d\tau-2\xi_i\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\xi_i^2+\int_t^T\big(g_i(\tau)-X_i(1)\big)\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i^2\tau}\int_\tau^T\big(g_i(s)-X_i(1)\big)e^{\lambda_i^2\left(\frac{1}{6}s-\frac{2}{3}T\right)}ds-2\xi_i\right]d\tau\right] \tag{31}$$

Таким образом, было найдено решение задачи Коши-Беллмана-Егорова для случая $W(t,1)>1$. Найдем минимум функционала качества.

$$I[u^0(t)]=S[t_0,V(t_0,x)]=\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i^2e^{\frac{2}{3}\lambda_i^2T}+\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i\left[\int_0^T\big(g_i(s)-X_i(1)\big)e^{\lambda_i^2\left(\frac{1}{6}\tau-\frac{2}{3}T\right)}ds-2\xi_i\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\xi_i^2+\int_0^T\big(g_i(\tau)-X_i(1)\big)\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i^2\tau}\int_\tau^T\big(g_i(s)-X_i(1)\big)e^{\lambda_i^2\left(\frac{1}{6}s-\frac{2}{3}T\right)}ds-2\xi_i\right]d\tau\right] \tag{32}$$

Для случая $W(t,1)<0$ решение ищется аналогичным способом. Так получаем решение задачи Коши-Беллмана-Егорова вида:

$$S[t,V]=\sum_{i=1}^{\infty}V_i^2(t)e^{\frac{2}{3}\lambda_i^2(t-T)}+\sum_{i=1}^{\infty}V_i(t)\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i^2 t}\int_t^T\big(g_i(s)+X_i(1)\big)e^{\lambda_i^2\left(\frac{1}{6}\tau-\frac{2}{3}T\right)}ds-2\xi_i\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\xi_i^2+\int_t^T\big(g_i(\tau)+X_i(1)\big)\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i^2\tau}\int_\tau^T\big(g_i(s)+X_i(1)\big)e^{\lambda_i^2\left(\frac{1}{6}s-\frac{2}{3}T\right)}ds-2\xi_i\right]d\tau\right] \tag{42}$$

и минимум функционала качества вида:

$$I[u^0(t)]=\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i^2e^{\frac{2}{3}\lambda_i^2T}+\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i\left[\int_0^T\big(g_i(s)+X_i(1)\big)e^{\lambda_i^2\left(\frac{1}{6}\tau-\frac{2}{3}T\right)}ds-2\xi_i\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\xi_i^2+\int_0^T\big(g_i(\tau)+X_i(1)\big)\left[e^{\frac{1}{2}\lambda_i^2\tau}\int_\tau^T\big(g_i(s)+X_i(1)\big)e^{\lambda_i^2\left(\frac{1}{6}s-\frac{2}{3}T\right)}ds-2\xi_i\right]d\tau\right] \tag{43}$$

Таким образом, для задачи синтеза оптимального управления было получено решение задачи Коши-Беллмана-Егорова. Данное решение не предоставляет возможности найти оптимальное управление, т.к. функция градиент функционала $S[t,V]$ - $W(t,x)$ не известен, но известно что оптимальное управление достигается при $u(t)=1$ и $u(t)=-1$, но при этом не известно, на каких интервалах по t то или иное управление является оптимальным, покрыто ли все множество точек $[0,T]$ данными интервалами. Для определения оптимального управления требуются дальнейшие исследования.

Литература:

1. А. И. Егоров. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. - Москва: «Наука», 1978.

Рецензент: к.ф.-м.н. Сейдакмат кызы Э.