

Турдушев И.А., Скляр С.Н.

**ЫСЫК-КӨЛДӨГҮ АГЫМДАРДЫН ТАЛААЛАРЫН ЭСЕПТЕП БИЛҮҮҮ ҮЧҮН
САНДЫК ЫКМАЛАРДЫ ЖАНА АЛГОРИТМДЕРДИ ИШТЕП ЧЫГУУ**

Турдушев И.А., Скляр С.Н.

**РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РАСЧЕТА
ПОЛЯ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ОЗЕРЕ ИССЫК-КУЛЬ**

I.A. Turdushev, S.N. Sklyar

**DEVELOPMENT OF NUMERICAL METHODS AND ALGORITHMS FOR
CALCULATION OF WIND FLOWS' FIELDS OF ISSYK-KUL LAKE**

УДК: 519.63: 532.5

Көлмөнүн гидротермодинамика моделиндеги ылдамдыктар талааларын эсептөө үчүн жаңы сандык ыкмалар жана алгоритмдер иштеп чыкты. Сандык ыкмалардын түзүлүшү жумушун көрсөтүүчү эсептөө иштери жүзөгө ашырылды.

Негизги сөздөр: математикалык моделдөө, көлмөлөрдүн гидродинамикасы, интегро-интерполяциялык ыкманын проекциялык түрү.

Разработаны новые численные методы и алгоритмы для расчета поля скоростей в модели гидротермодинамики водоема. Проведены расчеты, демонстрирующие работу построенных численных методов.

Ключевые слова: математическое моделирование, гидродинамика водоемов, проекционный вариант интегро-интерполяционного метода.

New numerical methods and algorithms for calculation of velocity field in the model of hydrothermodynamics of reservoir were developed. Calculations that demonstrated efficiency of the developed numerical methods were performed.

Key words: mathematical modeling, hydrodynamics of reservoirs, projective variant of integro-interpolation method.

1. Постановка задачи.

В общей постановке модель ветровых течений в водоеме описывается нестационарной начально-краевой задачей для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1]. В работе [2], учитывая специфику озера Иссык-Куль, данная общая модель была упрощена с использованием процедуры обезразмеривания. При этом получилась следующая задача:

уравнения движения –

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \ell v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P^s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \ell u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P^s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad (2)$$

уравнение неразрывности несжимаемой жидкости –

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (3)$$

граничные условия –

$$\left\{ (x, y) \in \Omega_0, z = 0 \right\}: k \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\tau_x}{\rho_0}, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\tau_y}{\rho_0}, w = 0; \quad (4)$$

$$\left\{ (x, y) \in \Omega_0, z = H(x, y) \right\}: k \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\tau_x^b}{\rho_0}, k \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\tau_y^b}{\rho_0}, w = u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y}; \quad (5)$$

$$\left\{ (x, y) \in \partial\Omega_0, 0 \leq z \leq H(x, y) \right\}: Un_x + Vn_y = 0; \quad (6)$$

начальное условие –

$$t = 0: u = u^0, v = v^0. \quad (7)$$

Данную задачу, в первом приближении, можно использовать для моделирования ветровых течений в озере Иссык-Куль.

Задача (1)-(7) рассматривается в трехмерной области $\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in \Omega_0, 0 < z < H(x, y)\}$, где Ω_0 – двумерная область, расположенная в плоскости $\{z = 0\}$ (зеркало водоема); функция $H(x, y) > 0$ описывает рельеф дна. В (1)-(7) приняты следующие обозначения: u, v, w – компоненты вектора скорости течений, соответствующие осям x, y, z ; P^s – давление на невозмущенной поверхности $\{(x, y) \in \Omega_0, z = 0\}$; ρ_0 – среднее значение плотности; $\ell = \ell(x, y)$ – параметр Кориолиса; k – коэффициент вертикальной турбулентной вязкости; $n = (n_x, n_y)$ – вектор внешней нормали к боковой вертикальной границе области Ω ; τ_x, τ_y – компоненты касательного напряжения трения ветра. В (6) присутствуют интегральные скорости:

$$U(t, x, y) = \int_0^{H(x, y)} u(t, x, y, z) dz, \quad V(t, x, y) = \int_0^{H(x, y)} v(t, x, y, z) dz, \quad (8)$$

а в (5) принимается параметризация придонного трения следующего вида [3]:

$$\tau_x^b = \mu \rho_0 U, \quad \tau_y^b = \mu \rho_0 V, \quad \mu > 0. \quad (9)$$

В настоящей работе для задачи (1)-(7) предлагаются численные методы и алгоритмы для определения поля ветровых течений в водоеме. Проводятся численные эксперименты, демонстрирующие работу новых численных методов.

2. Построение численных методов и алгоритмов для задачи (1)-(7).

Общепринятый метод расчета скорости течений использует представление горизонтальных компонент вектора скорости в виде суммы баротропной (\bar{u}, \bar{v}) и бароклинной $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ составляющих [1]:

$$u = \bar{u} + \mathfrak{u}, \quad v = \bar{v} + \mathfrak{v} \quad (10)$$

где

$$\bar{u} = U \cdot H^{-1}, \quad \bar{v} = V \cdot H^{-1}, \quad (11)$$

а интегральные скорости U и V определяются формулами (8). Мы также используем представление (10) при построении численных методов.

2.1. Разностная схема для расчета баротропных составляющих горизонтальных компонент вектора скорости.

Проинтегрируем уравнения (1)-(3) по переменной Z в пределах от 0 до H с учетом краевых условий (4), (5) и предположения (9); добавим к полученным уравнениям граничное условие (6) и начальное условие (7) для интегральных скоростей. В результате получим задачу для определения интегральных скоростей:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mu U - \ell V = -\frac{H}{\rho_0} \frac{\partial P^s}{\partial x} + \frac{\tau_x}{\rho_0}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu V + \ell U = -\frac{H}{\rho_0} \frac{\partial P^s}{\partial y} + \frac{\tau_y}{\rho_0}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad (14)$$

$$\{(x, y) \in \partial\Omega_0\}: Un_x + Vn_y = 0; \quad (15)$$

$$t = 0: U = U^o, V = V^o. \quad (16)$$

Построение разностной схемы для задачи (12)-(16) выполняется с использованием проекционного варианта интегро-интерполяционного метода (ПВИИМ) [4]. Сначала уравнения (12) и (13) аппроксимируются по времени. При этом получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{H} V \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a}{H} U \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b}{H} \right) \cdot U + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b}{H} \right) \cdot V = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}, \quad (17)$$

где $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $f = f(x, y)$ и $g = g(x, y)$ – известные функции. Уравнение (17) совместно с уравнением (14) и граничным условием (15) образуют задачу, которую нужно решать на каждом шаге по времени. Далее выполняется аппроксимация уравнений (17) и (14) по пространственным переменным x и y . Подробно процесс построения разностной схемы для задачи (17), (14), (15) изложен в работе [5].

2.2. Разностная схема для расчета бароклинных составляющих горизонтальных компонент вектора скорости.

Методика построения разностной схемы для определения бароклинных составляющих горизонтального движения изложена в работе [6].

Сначала, на основе ПВИИМ, выполняется построение разностной схемы для задачи (1), (2), (4), (5), (7). В результате получается система разностных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} B_1\theta_1 - C_1\theta_2 = B_1^0\theta_1^0 + C_1^0\theta_2^0 + f_1 + F(P^s), \\ -A_j\theta_{j-1} + B_j\theta_j - C_j\theta_{j+1} = A_j^0\theta_{j-1}^0 + B_j^0\theta_j^0 + C_j^0\theta_{j+1}^0 + f_j + F(P^s), j = 2, \dots, n-1; \\ -A_n\theta_{n-1} + B_n\theta_n = A_n^0\theta_{n-1}^0 + B_n^0\theta_n^0 + f_n + F(P^s). \end{cases} \quad (18)$$

где $\theta_j = u_j + iv_j$ ($j = 1, \dots, n$) – комплексная скорость, $A_j, B_j, C_j, A_j^0, B_j^0, C_j^0, f_j$ ($j = 1, \dots, n$)

– известные комплексные величины, $F(P^s) = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial P^s}{\partial x} + i \frac{\partial P^s}{\partial y} \right)$.

Правые части уравнений (18) содержат неизвестные градиенты давления $F(P^s)$, поэтому данную систему уравнений невозможно «напрямую» использовать для вычисления горизонтальных компонент u и v вектора скорости. Однако, задачу, которая отличается от (18) отсутствием $F(P^s)$ в правых частях, можно использовать для определения бароклинных составляющих. В [6] доказывается следующее утверждение: пусть θ' – решение задачи, которая отличается от (18) отсутствием $F(P^s)$ в правых частях, тогда, бароклинная составляющая функции θ' совпадает с бароклинной составляющей функции θ , т.е.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}'.$$

2.3. Разностная схема для расчета вертикальной компоненты вектора скорости.

Продифференцируем уравнение (3) по переменной Z ; к полученному уравнению добавим граничные условия (4) и (5) для W . В итоге получим задачу для определения вертикальной компоненты вектора скорости:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right], \quad z \in (0, H); \\ w|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=H} = u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y}. \end{cases} \quad (19)$$

В работе [7] описывается разностная схема для задачи (19). Разностная схема строится с использованием метода конечных разностей. Также в [7] описывается подход, который позволяет производные $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial v}{\partial z}$ вычислять без привлечения процедуры разностного дифференцирования.

3. Численные эксперименты.

Были проведены численные эксперименты, связанные с расчетом поля ветровых течений для бассейна прямоугольной формы. На рисунке 1 приведен ветровой режим, который использовался при проведении расчетов. Стрелки на рисунке 1 указывают направление вектора, а цветом обозначена величина скорости, согласно шкале справа от графика. Ветер, приведенный на рисунке 1 можно, в первом приближении, использовать для моделирования ветрового режима над озером Иссык-Куль. В верхней половине бассейна действует затухающий ветер, направленный с востока на запад; в нижней половине – с запада на восток. Данные ветры соответствуют ветрам Иссык-Куля Санташ и Улан, соответственно. Рисунок 2 демонстрирует результат расчета баротропной компоненты. На рисунке 2 можно выделить характерную циклоническую циркуляцию, что соответствует выбранному ветровому режиму.

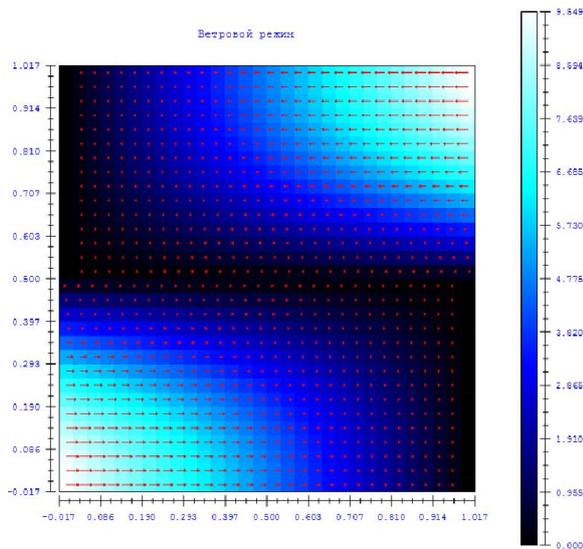


Рис. 1. Ветровой режим.

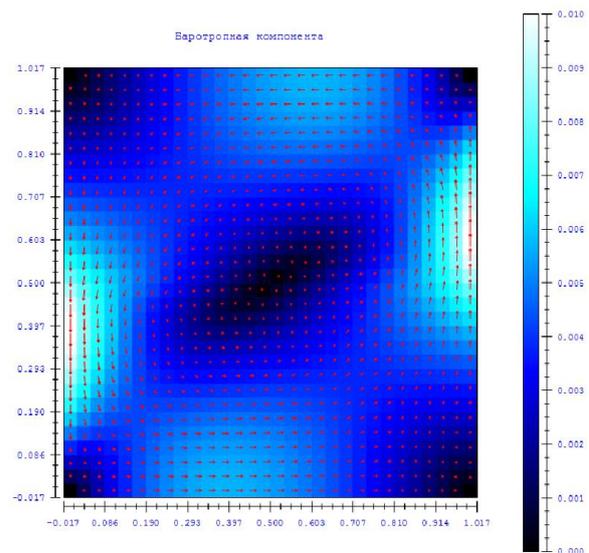


Рис. 2. Баротропная компонента.

Рисунок 3 – бароклинная компонента на поверхности рассматриваемого бассейна. Она отображает отклонение от баротропной компоненты в каждом узле расчетной сетки на поверхности водоема. Наконец, рисунок 4 демонстрирует направление и величину вертикальной компоненты в середине бассейна: красный цвет – вертикальная компонента направлена вверх, синий цвет – вниз.

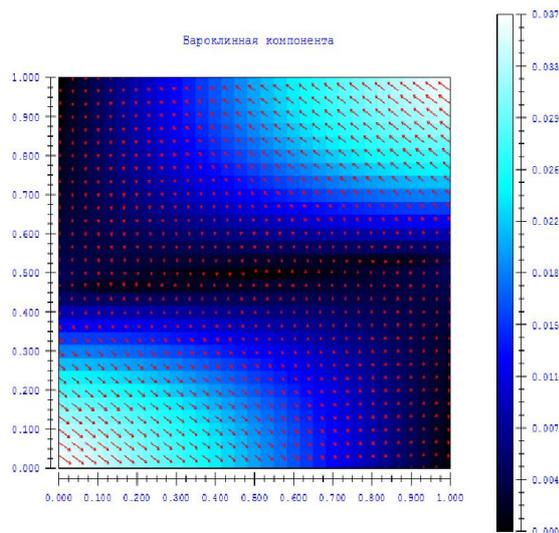


Рис. 3. Бароклининая компонента.

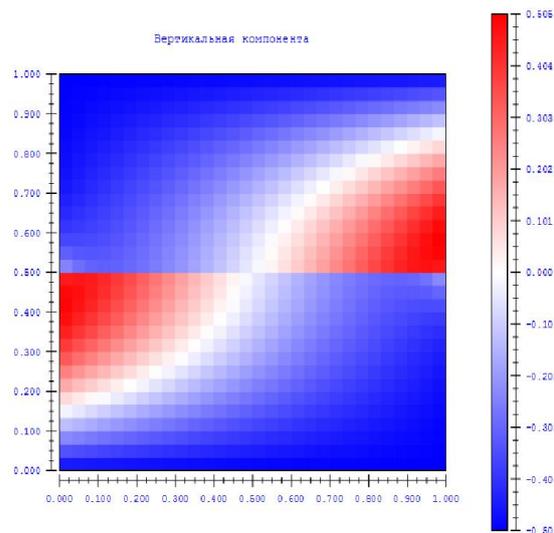


Рис. 4. Вертикальная компонента.

Литература:

1. Марчук Г.И., Саркисян А.С. Математическое моделирование циркуляции океана. - Москва: Наука, 1988. - 302 с.
2. Турдушев И.А. Ветровые течения в водоеме: анализ модели, точные решения / Современные техника и технологии в научных исследованиях: Материалы 6-ой международной конференции молодых ученых и студентов. 26-27 марта, 2014, г. Бишкек. / Под ред. Герман К.А., Мухамадеева В.А. - С. 139-144.
3. Кочергин В.П. Теория и методы расчета океанических течений. - Москва: Наука, 1978. - 128 с.
4. Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. I. Несамосопряженное уравнение, первая краевая задача // Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. 1988. № 4. С. 10-23; II. Несамосопряженное уравнение, третья краевая задача // Там же, 1989. № I. С. 3-10. III. Самосопряженное уравнение // Там же, 1989. № 4. - С. 3-11.
5. Турдушев И.А. Построение разностной схемы для расчета интегральных составляющих движения в трехмерной модели ветровых течений в водоеме // Вестник КРСУ. - Бишкек, 2015. - Том 15. - №5. - С. 91-95.
6. Скляр С.Н., Турдушев И.А. Построение разностной схемы для расчета горизонтальных компонент движения в трехмерной модели ветровых течений в водоеме // Вестник КРСУ. Бишкек, 2017 (в печати).
7. Скляр С.Н., Турдушев И.А. Построение разностной схемы для расчета вертикальной компоненты вектора скорости движения в трехмерной модели ветровых течений в водоеме // Вестник КРСУ. - Бишкек, 2017 (в печати).

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Абдылдаева Э.