Эсенов К.Р.

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ МЕЙКИНДИКТЕР ЖАНА АЛАРДЫН ГОЛОМОРФ-ПРОЕКТИВДҮҮ ЧАГЫЛДЫРУУСУ

Эсенов К.Р.

О ПРОСТРАНСТВАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ГОЛОМОРФНО-ПРОЕКТИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

K.R. Esenov

ON SECOND-ORDER SPACES AND THEIR HOLOMORPHIC-PROJECTIVE MAPPINGS

УДК: 515.12

Бул макалада негизги тривиалдуу эмес голоморф-проективдүү чагылдырунун теориянын (НГПО) тендемелерин экинчи тартиптеги K_n^2 *калер мейкиндиктери жаны формасы аркылуу изилденген. Бул мейкиндик* $M_0 \in K_n$ *берилген чекитинин жанында* K_n *инвариантту байланышкан* $K_n^2(y:g(y))$ *ассоциативдүү мейкиндик [1], [2].*

***Негизги сөздөр**: Келер мейкиндиги, тривиалдуу эмес голоморф-проективдүү чагылдыруу (НГПО), тривиалдуу эмес голоморф-проективдүү чагылдыруунун жаңы формасы.*

В статье исследованы на основании новой формы основных уравнений теории нетривиальных голоморфно-проективных отображений (НГПО) для келеровых пространств второго порядка K_n^2 *. Это пространство в окрестности произвольно фиксированной точки* $M_0 \in K_n$ *инвариантно связанные с* K_n *ассоциированное пространство* $K_n^2(y:g(y))$ *[1], [2].*

***Ключевые слова**: Келерово пространство, нетривиальное голоморфно-проективное отображение, новая форма нетривиального голоморфно-проективного отображения.*

In this paper, we investigate on the basis of a new form of the basic equations of the theory of nontrivial holomorphically projective maps (NGPO) for second-order Kahlerian spaces K_n^2 *. This space in a neighborhood of an arbitrarily fixed point* $M_0 \in K_n$ *is invariantly associated with* K_n *the associated space* $K_n^2(y:g(y))$ *[1], [2].*

***Key words**: Kahler manifolds, non-trivial holomorphic-projective mapping, a new form of non-trivial holomorphic-projective display.*

1. Рассмотрим эллиптически или гиперболически келеровы пространства K_n в которых существует невырожденный симметрический тензор $a_{ij}(a_{ij} = -e a_{\alpha\beta} F_i^\alpha F_j^\beta;\ e = \pm 1)$. $F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha$, F_i^h – структурный аффинор K_n удовлетворяющий условиям $F_\alpha^h F_i^\alpha = e\delta_i^h$, $F^\alpha{}_{(i} g_{j)\alpha} = 0$; $F_{li,j}^h = 0$; $e = \pm 1$ при $e = -1$ эллиптически $e = 1$ гиперболически келеровы пространства. Рассмотрим новую форму уравнений НПГО в виде

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i} y_{j)k} - e\lambda_{(\bar{i}} g_{\bar{j})k} \qquad (1.1)$$

где черта означает операцию сопряжения $g_{\bar{i}\bar{j}} = g_{\alpha\beta} F_i^\alpha F_j^\beta$.

Для келерова пространства второго порядка в окрестности произвольной расширенной точки $M(x_0)$ строится инвариантно связанное с K_n (или V_n) пространствами ассоциированное пространство K_n^2 (или V_n^2). Пространства V_n^2 или K_n^2 реализующее приближение 2-го порядка для V_n или K_n отнесенного к римановой системе координат с началом в точке M_0.

Рассмотрим НГО или НГПО пространства V_n^2 K_n^2, однако новая форма основных уравнений записываем в эквивалентном виде

$$\bar{g}_{i\alpha}\partial_k a_j^\alpha + a_j^\alpha \bar{\Gamma}_{\alpha k,i} - a_i^\alpha \bar{\Gamma}_{jk,\alpha} = \lambda_{(i}g_{j)k} \tag{1.2}$$

где $\bar{g}_{ij}(y)$ и $\bar{\Gamma}_{ij,k}$ метрический тензор V_n^2 и символы Кристоффеля

$$\bar{g}_{i\alpha}\partial_k a_j^\alpha + a_j^\alpha \bar{\Gamma}_{\alpha k,i} - a_i^\alpha \bar{\Gamma}_{jk,\alpha} = \lambda_{(i}g_{j)k} - e\bar{\lambda}_{(\bar{i}}\bar{F}_{\bar{j})k} \tag{1.3}$$

где $\bar{\lambda}_i = \lambda_\alpha \bar{F}_i^\alpha$, $\bar{F}_{ij} = \bar{g}_{i\alpha}\bar{F}_j^\alpha$ аффинор пространства K_n^2.

Уравнения (2) и (3) получены из (1) поднятием а затем опусканием одного и того же индекса i. Этот метод был предложен Й. Микешом. В дальнейшем впервые автором еще 1989 году опубликовано в печати. В справедливости ради надо отметить, что еще в 1586 году на семинаре профессора Н.С. Синюкова сделан доклад НГО и НГПО V_n^2 и K_n^2 с использованием новой формы основных уравнений автором [7]-[8]. Указанный метод Й. Микеша позволило в исследованиях V_n^2, V_n^3, K_n^2 и K_n^3 новый толчок с использованием новой формы уравнений теории НГО и НГПО для пространств второго порядка.

Если считать $\bar{a}_j^i$ $\bar{\lambda}^i$ и $\bar{F}_i^h$ аналитическими а для начала, постоянными числами мы имеем:

Теорема: Если компоненты тензора $\bar{a}_j^i$ и вектора $\bar{\lambda}_i$ являются постоянными числами то НГО пространства V_n^2 является аффинным отображением.

Теорема: Если в келеровом пространстве второго порядка K_n^2 с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}(y)$ и аффиннорной структурой F_i^h допускает НГО то компоненты ковариантно постоянных тензоров (если они аналитичны) и структура содержат только четные степени канонической системы координат.

В дальнейших исследованиях рассмотрены в уравнениях (2) и (3) считая $\bar{a}_{ij}, \lambda_i$ аналитическими функциями различные варианты вектора λ_i а также аффиннора F_i^h. При этом даже рассмотрены когда a_{ij}, λ_i и F_i^h являются постоянными числами. В заключении отметим, что те читатели которые интересуются теорией НГО и НПГО различных пространств и их приложениями в различных областях математики, механики и теоретической физики могут обратиться к литературам [3]-[6].

Замечание: Особенно внимательно прочесть [1]-[2] и методические пособия выпущенные 1985 году Микеша Й. и Кургатовой И.Г., а также Микеша Й. и Лейко С.Г. Эти пособия изданы в ограниченном количестве указанными ведущими доцентами кафедры геометрии и топологии ОГУ.

Ответственным редактором был заведующий кафедрой геометрии и топологии профессор Н.С. Синюков.

2. Римановы и келеровы пространства второго порядка и их тензорные признаки.

Если компоненты метрического тензора $g_{ij}(y)$ аналитические функции то многие задачи дифференциальной геометрии упрощаются за счет выбора специальных локальных координат.

Определение: Координаты $(y^1, y^2, y^3, ..., y^n)$ называются геодезическими в данной точке (y_0^i) многообразия M_n с аффинной связностью без кручения если, в этой точке коэффициенты связности равны нулю, т.е. $\Gamma_{ij}^n(y_0) = 0$.

Рассмотрим пространства аффинной связности A_n. Пусть в этом пространстве заданы тензор валентности $\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$ т.е. $T_{i_1 i_2 ... i_q}^{h_1 h_2 ... h_p}$. Будем считать, что этот тензор относительно некоторой системе координат разложимы в сходящиеся ряды Тейлора т.е. они аналитические функции:

$$T_{i_1 i_2 ... i_q}^{h_1 h_2 ... h_p}(y) = \underset{\circ}{F}{}_{i_1 i_2 ... i_q}^{h_1 h_2 ... h_p} + \underset{\circ}{F}{}_{i_1 i_2 ... i_q l_1}^{h_1 h_2 ... h_p} y^{l_1} + \underset{\circ}{F}{}_{i_1 i_2 ... i_q l_1 l_2}^{h_1 h_2 ... h_p} y^{l_1 l_2} + ... \qquad (2.1)$$

где $\underset{\circ}{F}{}_{i_1 i_2 ... i_q}^{h_1 h_2 ... h_p}$, $\underset{\circ}{F}{}_{i_1 i_2 ... i_q l_1}^{h_1 h_2 ... h_p}$, $\underset{\circ}{F}{}_{i_1 i_2 ... i_q l_1 l_2}^{h_1 h_2 ... h_p}$, $\underset{\circ}{F}{}_{i_1 i_2 ... i_q l_1 l_2 l_3}^{h_1 h_2 ... h_p}, ...$ (*) числа.

Если этот тензор ковариантно постоянен т.е.

$$T_{i_1 i_2 ... i_q}^{h_1 h_2 ... h_p} = \partial_K T_{i_1 i_2 ... i_q}^{h_1 h_2 ... h_p} + \sum_{i=1}^{p} \Gamma_{kl}^{h_t} T_{i_1 i_2 ... i_q}^{... h_{t-1} l h_{t+1}} - \sum_{i=1}^{q} \Gamma_{ki_t}^{l} T_{... i_{t-1} l i_{t+1}}^{h_1 h_2 ... h_p} ... \qquad (2.2)$$

объект связности пространства аффинной связности представляется в виде как однородные линейные функции указанных координат

$$\Gamma_{ij}^h = \underset{\circ}{\Gamma}{}_{ij\alpha}^{h} y^\alpha \qquad (2.3)$$

Подставляя соотношение (2.1), (2.3) в (2.2) а затем сгруппируем полученные соотношения по степеням $y^1, y^2, ..., y^m$ и учитывая, что числа определенные по (*) симметричны по любым двум нижним индексам которые после альтернирования по этим индексам дает нуль мы имеем:

Свободные числа $F_{i_1 i_2 ... i_q K}^{h_1 h_2 ... h_p} = 0$. Члены содержащие вторые степени после сгруппирования имеют вид $3F_{i_1 i_2 ... i_q K l_1 l_2}^{h_1 h_2 ... h_p} y^{l_1} y^{l_2}$. После некоторых преобразований и учитывая симметричности по любым двум нижним индексам а также продолжая процесс получим что ковариантно постоянный тензор содержит только четные степени указанных координат.

В итоге нами получены следующие результаты [7],[8].

Теорема 1. Если даны пространства аффинной связности A_n, риманово пространство второго порядка V_n^2 а также келерова пространства K_n^2 эллиптического и гиперболического типа и имеют места (2.1)-(2.3) то геометрические объекты определенные в этих пространствах содержат только четные степени этих координат.

Теорема 2. Если в точке M_0 геодезической системы координат вторые частные производные символов Кристоффеля первого рода равны нулю, то в точке M_0 ковариантная производная тензора Римана равна нулю.

Доказательство:

$$R_{hijk} = \partial_j \Gamma_{ikh} - \partial_k \Gamma_{ijh} + \Gamma_{ij\alpha} \Gamma_{nk\beta} y^{\beta\alpha} - \Gamma_{ik\alpha} \Gamma_{nj\beta} g^{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

Т.к. рассматриваемая система координат геодезическая, то

$$R_{hijk,l}(0) = \partial_l R_{hijk}(0) \quad (2.5)$$

Продифференцируем частным образом (2.4) по “l” то имеем

$$\partial_l R_{hijk} = \partial_{lj} \Gamma_{ikh} - \partial_{lk} \Gamma_{ijh}$$

По условию теоремы 2 $\partial_{lj} \Gamma_{ikh} = 0$ то $R_{hijk,l}(0)$

Эта теорема верна, когда вторые производные символов Кристоффеля второго рода риманового, келерового и пространства Аффинной связности обращается в нуль в начале геодезической систем координат.

Этим выделен впервые тензорный признак римановых и келеровых пространств второго порядка.

Литература:

1. Mikes Josef, Stepanova Elena, Vezurova Alena Diffential Geometry of Special Mappings, Palacky University. - Olomouc 2015
2. Н.С.Синюков. Геодезические отображения римановых пространств. - Москва: Наука, 1979.
3. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. - ГОНТИ 1938.
4. Фредерикс В.К. и Фридман А.А. Основы теории относительности Выпуск I. Тензорное исчисление. - Ленинград, 1924.
5. Дж.Л. Синуж. “Тензорные методы в динамике”. - М. 1947.
6. Победря Б.Е. “Лекции по тензорному анализу”. - М.: Издательство МГУ, 1979.
7. Эсенов К.Р. Геодезические и голоморфно-проективные отображения пространств второго порядка // Тез. сообщ. Областной конференции молодых ученых. - Умань. Дек.1989г. - Умань; Уманск. Гос. Унив-т 1990.
8. Эсенов К.Р. Специальные келеровы пространства второго порядка // Исследования по топологии и геометрии. – Бишкек: Кыргызский государственный университет, 1991. - С. 65-68.

Рецензент: д.ф.-м.н., доцент Темиров Б.К.