Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы.

СЫЗЫКТУУ МАТРИЦАЛЫК БИР ТЕКТҮҮ ЭМЕС МАЙДА КАДАМ МЕНЕН БЕРИЛГЕН АЙЫРМАЧЫЛ ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АЛГОРИТМИ

Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО НЕОДНОРОДНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ШАГОМ

Z.K. Imanaliev, B.Y. Ashirbaev

ALGORITHM OF SOLUTION OF A LINEAR MATRIX INHOMOGENEOUS DIFFERENCE EQUATION WITH SMALL STEP

УДК: 517. 926.7: 519.677

Илимий макалада сызыктуу, матрицалык бир тектүү эмес майда кадам менен берилген айырмачыл теңдеменин чыгарылышынын алгоритми сунушталды. Макалада ошондой эле сызыктуу, матрицалык бир тектүү майда кадам менен берилген айырмачыл теңдеме жана бул теңдемеге түйүндөш теңдеменин бири бири менен түйүндөш болуу шарттары далилденди.

Негизги сөздөр: *сингулярдык-дүүлүктүрүлгөн дифференциалдык теңдеме, кичине параметри менен берилген системалар, жөнөкөй түзүлүштөгү матрица, эселүү майда кадамдар.*

В данной статье предложен алгоритм решения линейного матричного неоднородного разностного уравнения. В статье, также доказаны условия сопряженности однородного матричного разностного уравнения и сопряженное уравнение к этому уравнению.

Ключевые слова: *сингулярно-возмущенное дифференциальное уравнение, системы с малым параметром, матрица простой структуры, кратные малые шаги.*

In this paper, an algorithm for solving a linear matrix inhomogeneous difference equation is proposed. In this paper, the conjugacy conditions of the homogeneous matrix difference equation and the adjoint equation to this equation are also proved.

Key words*: A singularly perturbed differential equation, a system with a small parameter, a simple structure matrix, multiple small steps.*

Введение. При построении алгоритмов оптимального управления для стационарной системы с малым параметром рассматривается сингулярно-возмущенное матричное дифференциальное уравнение вида [1, 2]

$$\mu\dot{X}(t) = AX(t) + X(t)A' + W, \quad X(0) = X_0. \tag{1}$$

В работе будем рассматривать уравнение, которая является дискретным аналогом уравнения (1) вида

$$X(t+\mu) = AX(t) + X(t)A' + W, \qquad X(0) = X_0, \tag{2}$$

где $X - (n\times n)$ матрица, , $A,\ W - (n\times n)$ постоянные матрицы, $t \in T_\mu = \{t\colon\ t = k\mu,\ \ k = 0,\ 1, \cdots, N-1\} \subset T = \{t\colon 0 \le t \le 1\},\ N = \frac{1}{\mu},\ \mu > 0 -$ малый шаг, штрих обозначает транспонирование.

Исследования уравнений вида (2) является продолжением исследований авторов по дискретным задачам оптимального управления с малым шагом [3, 4].

Следует отметить, что уравнение (2) можно записать в виде системы линейных разностных уравнений. Если все матрицы в (2) имеют размерности $(n\times n)$, то размерность вектора решений будет n^2.

Предположим, что

1. Матрица A является матрицей простой структуры [5] и она не имеет нулевого собственного значения $\lambda_i\ \ (i = \overline{1,n})$.

2. Все собственные значения λ_i матрицы A удовлетворяют условию $|\lambda_i| < q_0 < 1$.

При выполнении условии 1 простую структуру будут иметь также матрицы A' и A^{-1}, их собственные значения совпадают [5] и матрица A является невырожденной.

Алгоритм решения задачи. При выполнении условии 2 для матрицы A имеет место ограничение по норме [5]

$$\|A^l\| \le C_0 q_0^l \quad (C_0 \ge 1,\ l = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

Теорема 1. Матричное решение уравнения (2) дается формулой

$$X(t) = \left(A\sqrt[k]{X(0)} + \sqrt[k]{X(0)}A'\right)^k + \sum_{i=1}^{k-1}\left(A^{k-i}\sqrt[k-i]{W} + \sqrt[k-i]{W}A'\right)^{k-i} + W, \quad (4)$$

и оно имеет оценку

$$\|X(t)\| \leq M\left(\frac{1-q_0^k}{1-q_0}\right) \quad (M - \text{const},\ k = 1, 2, 3, \cdots). \quad (5)$$

При этом, для кратных малых шагов $\tau = p\mu$ справедливы соотношения

$$X(t+\tau) = \left(A\sqrt[k]{X(\tau)} + \sqrt[k]{X(\tau)}A'\right)^k + \sum_{i=1}^{k-1}\left(A^{k-i}\sqrt[k-i]{W} + \sqrt[k-i]{W}A'\right)^{k-i} + W, \quad (6)$$

$$\lim_{\mu\to 0} X(t+\tau) = X(t). \quad (7)$$

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. При $k = 0,\ t = 0$ из уравнения (2) будем иметь $X(\mu) = AX(0) + X(0)A' + W$. При $k = 1,\ t = \mu$ имеем:

$$X(2\mu) = AX(\mu) + X(\mu)A' + W =$$
$$= A(AX(0) + X(0)A' + W) + (AX(0) + X(0)A' + W)A' + W =$$
$$= A^2X(0) + 2AX(0)A' + X(0)(A')^2 + AW + WA' + W =$$
$$= \left(A\sqrt{X(0)} + \sqrt{X(0)}A'\right)^2 + AW + WA' + W.$$

При $k = 2,\ t = 2\mu$:

$$X(3\mu) = AX(2\mu) + X(2\mu)A' + W = A(A^2X(0) + 2AX(0)A' + +X(0)(A')^2) + AW + WA' + W) + (A^2X(0) + 2AX(0)A' + X(0)(A')^2 + +AW + WA' + W)A' + W = A^3X(0) + 3A^2X(0)A' + 3AX(0)(A')^2 + A^2X + +X(0)(A')^3 + A^2W + 2AWA' + W(A')^2 + AW + WA' + W =$$

$$= \left(A\sqrt[3]{X(0)} + \sqrt[3]{X(0)}A'\right)^3 + \left(A\sqrt{W} + \sqrt{W}A'\right)^2 + AW + WA' + W.$$

Аналогично для любого $k \leq N-1,\ t = k\mu$ справедливы соотношения:

$$X(k\mu) = A^kX(0) + C_k^1A^{k-1}X(0)A' + \cdots + C_k^mA^{k-m}X(0)(A')^m + \cdots +$$
$$+X(0)(A')^k + A^{k-1}W + C_{k-1}^1A^{k-2}WA' + \cdots + C_{k-1}^mA^{k-1-m}W(A')^m + \cdots + W(A')^{k-1} + A^{k-2}W + C_{k-2}^1A^{k-3}WA' + \cdots + C_{k-2}^mA^{k-2-m}W(A')^m + \cdots + +W(A')^{k-2} + \cdots + AW + WA' + W = \left(A\sqrt[k]{X(0)} + \sqrt[k]{X(0)}A'\right)^k + \sum_{i=1}^{k-1}\left(A^{k-i}\sqrt[k-i]{W} + \sqrt[k-i]{W}A'\right)^{k-i} + W.$$

Таким образом, в результате получим формулу (4), ч. т. д.

Теперь переходим к следующему этапу. С учетом (4) из равенства (2) имеем: $X(t+\mu) = X[(k+1)\mu] =$

$$= A\left[\left(A\sqrt[k]{X(0)} + \sqrt[k]{X(0)}A'\right)^k + \sum_{i=1}^{k-1}\left(A^{k-i}\sqrt[k-i]{W} + \sqrt[k-i]{W}A'\right)^{k-i} + W\right] +$$

$$+\left(A\sqrt[k]{X(0)} + \sqrt[k]{X(0)}A'\right)^k + \sum_{i=1}^{k-1}\left(A^{k-i}\sqrt[k-i]{W} + \sqrt[k-i]{W}A'\right)^{k-i} + W =$$

$$= A^k(AX(0) + X(0)A' + W) + C_k^1 A^{k-1}(AX(0) + X(0)A' + W)A' + \quad + \cdots$$

$$+ C_k^m A^{k-m}(AX(0) + X(0)A' + W)(A')^m + \cdots +$$

$$+(AX(0) + X(0)A' + W)(A')^k +$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\left(A^{k-i}\sqrt{W} + \sqrt[k-i]{W}A'\right)^{k-i} A' + W =$$

$$= \left[A(X(\mu))^{\frac{1}{k}} + (X(\mu))^{\frac{1}{k}}A'\right]^k + \sum_{i=1}^{k-1}\left(A^{k-i}\sqrt{W} + \sqrt[k-i]{W}A'\right)^{k-i} A' + W.$$

Для матрицы $X(t+2\mu)$ получим $X(t+2\mu) = \left[A(X(2\mu))^{\frac{1}{k}} + (X(2\mu))^{\frac{1}{k}}A'\right]^k + \sum_{i=1}^{k-1}\left(A^{k-i}\sqrt{W} + \sqrt[k-i]{W}A'\right)^{k-i} A' + W$.

Продолжая этот процесс для p кратных малых шагов $\tau = p\mu$ имеем:

$$X(t+\tau) = \left[A(X(\tau))^{\frac{1}{k}} + (X(\tau))^{\frac{1}{k}}A'\right]^k + \sum_{i=1}^{k-1}\left(A^{k-i}\sqrt{W} + \sqrt[k-i]{W}A'\right)^{k-i} A' + W.$$

Отсюда видно, что при $\mu \to 0,\ \tau \to 0$ имеет место предельное соотношение (7) ч. т. д.

При проектировании оптимальных систем управления очень часто необходимые условия оптимальности приводят к уравнениям сопряженной системы.

Как известно [6], множества квадратных матриц порядка n образует векторное пространство $R^{n\times n}$. Введем в этом пространстве скалярное произведение по формуле

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ij} = tr(XY) = tr(YX). \qquad (8)$$

Пользуясь свойствами следа матрицы легко проверить, что все требования скалярного произведения выполняются и полученное пространство является n −мерным евклидовым пространством $R^{n\times n}$.

Рассмотрим в этом пространстве однородное матричное разностное уравнение, соответствующее уравнению (2) вида

$$X(t+\mu) = AX(t) + X(t)A' \qquad (9)$$

и уравнение вида

$$P(t+\mu) = -A'X(t) - P(t)A. \qquad (10)$$

Условия сопряженности матричных уравнений (9), (10) и вывод этого условия приведен в следующей теореме.

Теорема 2. Для того, чтобы уравнения (9) и (10) были сопряженными необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие

$$tr\big(X'(t+\mu)P(t) + X'(t)P(t+\mu)\big) = 0, \qquad (11)$$

при любых дискретных значений аргумента $t \in T_\mu$.

Доказательство необходимости выполнения условия (11). Пусть выполняется условие (11) и $X'(t) \neq 0$ является решением уравнения

$$X'(t+\mu) = X'(t)A' + AX'(t). \qquad (12)$$

Тогда пользуясь свойствами следа матрицы и с учетом соотношений (12) из равенства (11) будем иметь

$$tr\big((X'(t)A' + AX'(t))P(t) + X'(t)P(t+\mu)\big) =$$

$$= tr\big(X'(t)(A'P(t) + P(t)A + P(t+\mu)\big) = 0. \qquad (13)$$

Из равенства (13) видно, что условие $X'(t) \neq 0$ выполняется в том случае, если

$$A'P(t) + P(t)A + P(t+\mu) = 0.$$

Отсюда имеем уравнение (10).

Доказательство достаточность выполнения условия (11). Пусть уравнения (9) и (10) являются сопряженными. Тогда

$$tr\big(X'(t+\mu)P(t) + X'(t)P(t+\mu)\big) = tr((X'(t)A' + AX'(t))P(t) + +X'(t)(-A'X(t) - P(t)A)) = tr(X'(t)A'P(t)) + tr(X'(t)P(t)A) - -tr(X'(t)A'P(t)) - tr(X'(t)P(t)A) = 0,$$ ч. т. д.

Заключение. Уравнения (9) и (10) играют важную роль в теории управления импульсными системами с малым шагом квантования.

Предложенный алгоритм решения линейного матричного неоднородного разностного уравнения применяется в исследовании матричного разностного уравнения с малым шагом. Результаты работ будут использованы при построении решений алгебраических матричных уравнений Ляпунова и дискретных задач оптимального управления с малым шагом.

Литература:

1. Иманалиев З.К. Об одном методе оптимального управления сингулярно возмущенными системами с минимальной энергией // Вестник КНУ им Ж. Баласагына. - 2005. Вып 3, серия 5. - С. 25-30.
2. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Вывод одного из критериев управляемости сингулярно возмущенных систем оптимального управления //Известия КГТУ им И.Раззакова. - 2006. - №9. - С.5-10.
3. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Алгоритм решения линейного матричного разностного уравнения с малым шагом // Проблемы современной науки и образования. - Иваново, РФ, 2016. - №8 (50). - С.8-10.
4. Аширбаев Б.Ы. Декомпозиция и алгоритм решения задач оптимального управления с малым шагом //Известия КГТУ им. И.Раззакова. - 2016. - №3 (39). - С.25-31.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. - М: Наука, 1973. - 272с.
6. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. - Москва: Наука, 1976. - 424 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Абдылдаева Э.