Тасмамбетов Ж.Н., Талипова М.Ж.

МАТЬЕ ТЕҢДЕМЕСИНИН АСИМПТОТИКАЛЫК ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН КӨБӨЙТҮНДҮСҮН ТУРГУЗУУ ЖӨНҮНДӨ

Тасмамбетов Ж.Н., Талипова М.Ж.

О ПОСТРОЕНИИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

J.N. Tasmambetov, M.J. Talipova

THE CONSTRUCTION OF THE ASYMPTOTIC SOLUTIONS PRODUCT OF THE MATHIEU EQUATION

УДК: 517.946; 517.58

Ар түрдүү өзгөчө чекиттердин аймагындагы Матьенин атайын алгебралык теңдемесинин туруктуу жана туруксуз чыгарылыштарын Фробениус-Латышева ыкмасы мене тургузуу мүмкүнчүлүктөрү каралган, ошондой эле бир жана эки өзгөрмөлүү Матье функциясынын көбөйтүндүсү тургузулган.

Негизги сөздөр: *Матье теңдемеси, ранг, антиранг, туруктуу чыгарылыштар, туруксыз чыгарылыштар, нормалдуу катар.*

Изучены возможности построения регулярных и иррегулярных решений специального алгебраического уравнения Матье в окрестности различных особых точек методом Фробениуса-Латышевой, а также построены произведения функции Матье одной и двух переменных.

Ключевые слова: *уравнение Матье, ранг, антиранг, регулярные решения, иррегулярные решения, нормальный ряд.*

The possibilities of constructing regular and irregular solutions of the special algebraic Mathieu equation in the neighborhood of various singularities, to be the exact by Frobennis-Latysheva method, as well as the product of one and two variables Mathieu function are studied.

Key words: *Mathieu equation, rank, antirank, regular solutions, irregular solutions, the normal series.*

1. Введение. Дифференциальное уравнение связанное с именем Матье было рассмотрено в 1898 году в связи с задачей о колебаниях эллиптической мембраны. Решения уравнения Матье называются функциями Матье и имеют период π или 2π относительно независимой переменной.

В данной работе рассматривается специальное алгебраическое уравнение [1, 285 с.] Матье

$$\left(\xi^2-\boldsymbol{k}^2\right)\cdot\frac{\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{d}\xi^2}+\xi\cdot\frac{\boldsymbol{dU}}{\boldsymbol{d}\xi}+\left(\xi^2-\boldsymbol{M}^2\right)\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0} \qquad (\mathbf{1.1})$$

где $\boldsymbol{M}^2\equiv\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}^2$, полученная с помощью замены $\boldsymbol{k}\cdot\sin\boldsymbol{z}=\xi$ из уравнение Матье вида

$$\frac{\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{dz}^2}+\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{k}^2\cdot\cos 2\boldsymbol{z}\right)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}. \qquad (1.2)$$

При этом мы опираемся на теорию Линдемана-Стильтеса [2, 274 с.], где уравнение Матье с периодическими коэффициентами приводится к специальной алгебраической уравнении. Это позволяет определить особые точки заданного уравнения и установить ряд интересных свойств уравнение Матье (1.2). Периодичность функций Матье будет иметь место не для всех значений $\boldsymbol{a}$, а только для вполне определенных заданных $\boldsymbol{q}$, называемых собственными значениями. Из обычных функций Матье при введении мнимого аргумента получают модифицированные функции Матье.

Целью работы является изучение возможности построения асимптотических решений алгебраическое уравнение Матье (1.1) в окрестности различных особых точек методом Фробениуса-Латышевой [3], а также изучение произведения функции Матье одной и двух переменных.

2. Основные сведения. Алгебраическое уравнение Матье (1.1) является частным случаем линейного дифференциального уравнения

$$\sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{i}}(\xi)\cdot\frac{\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{i}}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{d}\xi^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{i}}}=\boldsymbol{0} \qquad (\mathbf{2.1})$$

с полиномиальными коэффициентами

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{i}}(\xi)=\sum_{\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{i}}}^{\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{i}}}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{is}}\cdot\xi^{\boldsymbol{s}},$$

где $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{i}}\le\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{i}}$ – целые неотрицательные числа, причем не все $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$.

Определение. Формальные решения уравнения вида (2.1) вида

$$\boldsymbol{y \sim expQ}(\xi) \cdot \xi^{\rho} \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{C_i} \cdot \xi^{-\boldsymbol{i}} \qquad (\mathbf{2.2})$$

называется нормальными рядами Томе порядка $\boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{\rho}$ – корень определяющего уравнения относительно особой точки $\xi = \infty$ вспомогательного уравнения полученного из (2.1) с помощью преобразования

$$\boldsymbol{y = expQ}(\xi) \cdot \boldsymbol{U}, \qquad (\mathbf{2.3})$$

где функция

$$\boldsymbol{Q}(\xi) = \sum_{s=1}^{p} \frac{\boldsymbol{\alpha_{p-s}} \cdot \xi^{s}}{\boldsymbol{s}} \qquad (\mathbf{2.4})$$

$\left(\boldsymbol{\alpha_{p-s}}\ (\boldsymbol{s = 1, 2, \ldots, p})\right)$– неизвестные коэффициенты).

Понятие ранга $\boldsymbol{p = 1 + k}$ ($\boldsymbol{k}$ – подранг) [3] введенное А.Пуанкаре и антиранга $\boldsymbol{m = -1 -} \lambda$ (λ – антиподранг) веденное Л.Томе характеризует изменения коэффициентов в линейном дифференциальном уравнений (2.1). Так, если $\boldsymbol{p \leq 0}$, то точка $\xi = \infty$ – особая регулярная, когда $\boldsymbol{p > 0}$ – особая иррегулярная. При $\boldsymbol{m \leq 0}$ – особая точка $\xi = \mathbf{0}$ – регулярная, а при $\boldsymbol{m > 0}$ – особая иррегулярная.

Корни характеристического уравнения

$$\boldsymbol{\alpha_0^n + p_{10} \cdot \alpha_0^{n-1} + \cdots + p_{n-1,0} \cdot \alpha_0 + p_{n,0} = 0}, \qquad (\mathbf{2.5})$$

имеют основное значение при построении асимптотических решений в виде нормальных рядов Томе (2.2), где неизвестным является $\boldsymbol{\alpha_0}$ – коэффициент при наивысшей степени ξ функции $\boldsymbol{Q}(\xi)$ в (2.4).

3. Применение метода Фробениуса-Латышевой. Применение метода Фробениуса Латышевой покажем на примере построение асимптотических решений уравнение (1.1) для достаточно больших значений независимой переменной ξ.

Теорема 3.1. Алгебраическое уравнение Матье (1.1) для достаточно больших значений независимой переменной $\xi = \infty$ имеет иррегулярные решения в виде нормальных рядов Томе

$$\boldsymbol{U_1}(\xi) = \boldsymbol{e}^{i\xi} \cdot \xi^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{C_1}}{\xi} + \frac{\boldsymbol{C_2}}{\xi^2} + \cdots\right), \qquad (\mathbf{3.1})$$

$$\boldsymbol{U_2}(\xi) = \boldsymbol{e}^{-i\xi} \cdot \xi^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{C_1}}{\xi} + \frac{\boldsymbol{C_2}}{\xi^2} + \cdots\right), \qquad (\mathbf{3.2})$$

где $\mathrm{C}_{\mathbf{1}}, \mathrm{C}_{\mathbf{2}}, \ldots$ – некоторые постоянные, зависящие от $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{q = k^2}, \boldsymbol{M^2 \equiv a + \frac{1}{2}k^2}$.

Особые точки. Подранг уравнения $\boldsymbol{k_{max} = 0}$, поэтому, ранг $\boldsymbol{p = 1 + k_{max} = 1 > 0}$ и особая точка $\xi = \infty$ – особая иррегулярная [4].

Аналогично, по наименьшим степеням определим антиранг уравнения: $\boldsymbol{m = -1 -} \lambda_{\boldsymbol{min}} \boldsymbol{= -1 < 0}$ и конечные точки $\xi_{\mathbf{1,2}} = \pm\boldsymbol{k}$ – особые регулярные, а $\xi = \mathbf{0}$ является обыкновенной точкой.

3.1. О построении формального решения вспомогательного уравнения. Поскольку ранг $\boldsymbol{p = 1}$, то справедливо преобразование

$$\boldsymbol{u = exp(\alpha_0} \xi) \cdot \boldsymbol{U}, \qquad (3.3)$$

где многочлен $\boldsymbol{Q}(\xi) = \boldsymbol{\alpha_0} \cdot \xi$, то есть первой степени.

Вспомогательное уравнение полученное с помощью преобразования (3.3) имеет вид

$$\left(\xi^2 - \boldsymbol{M^2}\right)\boldsymbol{U''} + \left\{\left(\xi^2 - \boldsymbol{k^2}\right)\boldsymbol{2\alpha} + \xi\right\}\boldsymbol{U'} +$$

$$+\left\{\left(\boldsymbol{\alpha^2 + 1}\right)\xi^2 + \boldsymbol{\alpha}\xi - \boldsymbol{\alpha^2 k^2 - M^2}\right\}\boldsymbol{U = 0}. \qquad (3.4)$$

Характеристическое уравнение вида (2.5) получим приравниванием к нулю коэффициента при наибольшей степени независимой переменной при неизвестной $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{\alpha^2 + 1 = 0}. \qquad (3.5)$$

Оно имеет различные корни $\boldsymbol{\alpha_0^{(1,2)} = \pm i}$. При различных значениях $\boldsymbol{\alpha_0^{(1)}}$ и $\boldsymbol{\alpha_0^{(2)}}$ из вспомогательного уравнения (3.4) получим два уравнения

$$\left(\xi^2 - \boldsymbol{M^2}\right)\boldsymbol{U''} + \left(\boldsymbol{-2ik^2} + \xi + \boldsymbol{2i}\xi^2\right)\boldsymbol{U'} + \{(\boldsymbol{k^2 - M^2}) + \boldsymbol{i}\xi\}\boldsymbol{U = 0} \qquad (3.6)$$

$$\left(\xi^2 - M^2\right)U'' + \left(2ik^2 + \xi - 2i\xi^2\right)U' + \{(k^2 - M^2) - i\xi\}U = 0. \qquad (3.7)$$

Каждое из этих уравнений имеет решения вида

$$U = \xi^{\rho} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu} \cdot \xi^{-\mu} \qquad (C_0 \neq 0) \qquad (3.8)$$

в окрестности особой точки $\xi = \infty$.

Построим асимптотические решения уравнение (3.6). С этой целью составляем характеристическую функцию и находим определяющее уравнение $\varphi_0(\rho) = i \cdot (2\rho + 1) = 0$ относительно особой точки $\xi = \infty$. Отсюда, определим $\rho = -1/2$. Используя $\rho = -1/2$ определим неизвестные коэффициенты C_{μ} $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ [4]. Тогда с учетом преобразования (3.3) асимптотическое решение уравнение (3.6) получим в виде

$$U_1(\xi) = e^{i\xi} \cdot \xi^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{C_1}{\xi} + \frac{C_2}{\xi^2} + \cdots\right), \qquad (3.1)$$

где коэффициенты

$$C_1 = -\frac{1}{2} i \left(\frac{1}{4} - M^2 + k^2\right),$$

$$C_2 = -\frac{1}{8} i \left(\frac{1}{4} - M^2 + k^2\right)\left(\frac{9}{4} - M^2 + k^2\right) + \frac{1}{4} \cdot k^2,$$

- -

$$2i(n+1) \cdot C_{n+1} = \left\{\frac{1}{4} - M^2 + k^2 + n(n+1)\right\} +$$

$$+(2n-1) \cdot ik^2 \cdot C_{n-1} - \left(n^2 - 2n + \frac{3}{4}\right)k^2 \cdot C_{n-2},$$

определяются из последней рекуррентной формулы.

Таким же образом, построим асимптотическое решение уравнение (3.7) соответствующее показателям $\lambda_0 = -i$ и $\rho = -1/2$ в виде (3.2), что и требовалось доказать. В [1, 286 с.] подчеркивается, что эти два ряда представленные в виде (3.1) и (3.2) являются формальными решениями уравнение Матье, приводящимися к известным асимптотическим решениям уравнения Бесселя [1, 207 с.], когда $k \to 0$.

4. О связи с асимптотическими решениями уравнения Бесселя. При изучении функции Матье особое значение имеет функция Бесселя. Действительно, пусть в (1.1) $k \to 0$, тогда получим известное уравнение Бесселя

$$\xi^2 \cdot \frac{d^2U}{d\xi^2} + \xi \cdot \frac{dU}{d\xi} + \left(\xi^2 - M^2\right) \cdot U = 0, \qquad (4.1)$$

где $M^2 \equiv a$.

Точка $\xi = 0$ для уравнение (4.1) является регулярной особой точкой, то уравнение Бесселя (4.1) удовлетворяется двумя независимыми решениями

$$U_1 = J_n(\xi), \; U_2 = J_{-n}(\xi). \qquad (4.2)$$

Когда $k \neq 0$, точка $\xi = 0$ для уравнения (1.1) является обыкновенной точкой. В монографии Мак-Лахлана [1, 191 с.] показано, что в этом случае, решение можно построить в виде суммы бесселевых функций

$$U = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \cdot C_{2r} \cdot J_{2r}(\xi).$$

Это облегчает построения двух независимых решений заданного уравнения и установлению сходимости рядов.

При $n = 0$ для больших положительных значениях ξ Пуассон получил формальное разложение для функции Бесселя $J_0(\xi)$. Позднее Якоби [1, 207 с.] получил общую формулу $J_n(\xi)$ асимптотического разложения при $|\xi|$ большом для вещественных значений ξ. Эти разложения полезны тем, что даже когда ξ не очень велико, значение функции $J_n(z)$ может быть вычислено по этой формуле с большой точностью.

5. Произведения асимптотических решений Матье. В данном пункте, применяя метод Ватсона хотим получить произведения функций Матье представленных в виде нормальных рядов Томе.

Пусть функция Матье $U_{10}(\xi)$ представленное в виде нормального ряда Томе (3.1) удовлетворяет алгебраическому уравнению Матье

$$\left(\xi^2 - M_1^2\right) \cdot \frac{d^2U}{d\xi^2} + \xi \cdot \frac{dU}{d\xi} + \left(\xi^2 - M_1^2\right) \cdot U = 0. \qquad (5.1)$$

Далее, пусть функция Матье $U_{01}(\eta)$ удовлетворяет уравнению Матье

$$(\eta^2 - M_2^2)\cdot\frac{d^2U}{d\eta^2} + \eta\cdot\frac{dU}{d\eta} + (\eta^2 - M_2^2)\cdot U = 0. \qquad (5.2)$$

Умножим равенство (5.1) на $U_{01}(\eta)$, а равенство (5.2) на $U_{10}(\xi)$ и сложим их почленно. Вводя обозначение $U(\xi,\eta) = U_{10}(\xi)\cdot U_{01}(\eta)$, получим, что это произведение удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка

$$(\xi^2 - M_1^2)\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + (\eta^2 - M_2^2)\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} + \xi\frac{\partial U}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial U}{\partial\eta} + \\ +(\xi^2 - M_1^2 + \eta^2 - M_2^2)\cdot U = 0. \qquad (5.3)$$

Тогда произведение нормальных рядов Томе представляется в следующем виде

$$U(\xi,\eta)\sim U_{10}(\xi)\cdot U_{01}(\eta) = exp(i\xi + i\eta)\cdot\xi^{-\frac{1}{2}}\cdot\eta^{-\frac{1}{2}}\cdot \\ \left(C_0^{(1)} + \frac{C_1^{(1)}}{\xi} + \frac{C_2^{(1)}}{\xi^2} + \frac{C_3^{(1)}}{\xi^3} + \cdots\right)\times\left(C_0^{(2)} + \frac{C_1^{(2)}}{\eta} + \frac{C_2^{(2)}}{\eta^2} + \frac{C_3^{(2)}}{\eta^3} + \cdots\right) \\ = exp(i\xi + i\eta)\cdot\xi^{-\frac{1}{2}}\cdot\eta^{-\frac{1}{2}}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}^{(j)}\cdot\xi^{-\mu}\cdot\eta^{-\nu}, \qquad (5.4)$$

где $C_{\mu,\nu}^{(j)} = C_\mu^{(1)}\cdot C_\nu^{(2)}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,\ldots; j = 1,2)$ и формально удовлетворяет уравнению в частных производных второго порядка (5.3).

Теорема 5.1. Произведения нормальных рядов Томе (5.4) является асимптотическим решением дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (5.3) и представляет функцию Матье двух переменных ξ и η.

Следуя Н.В. Мак-Лахлан введем обозначения $Ce_1(\xi,q)$ и $Ce_1(\eta,q)$ для асимптотических решений уравнения (5.1), (5.2) и учитывая первоначальные обозначения $k_1\cdot\sin z = \xi$, $k_2\cdot\sin z = \eta$ имеем

$$Ce_1(\xi,q_1)\sim exp(ik_1\cdot\sin z)\cdot\sum_{\mu=0}^{\infty} C_\mu^{(1)}\cdot(k_1\cdot\sin z)^{-\mu},$$

$$Ce_1(\eta,q_2)\sim exp(ik_2\cdot\sin t)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu^{(2)}\cdot(k_2\cdot\sin t)^{-\nu}.$$

Поэтому, для больших значений $|\sin z|$ и $|\sin t|$ произведение нормальных рядов Томе (5.4) можно представить в виде

$$C_{11}(\xi,\eta;q_1,q_2)\sim exp(\sin z + \sin t)i\cdot\xi^{-\frac{1}{2}}\cdot\eta^{-\frac{1}{2}}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}^{(j)}\cdot(\sin z)^{-\mu}\cdot(\sin t)^{-\nu},$$

где $C_{\mu,\nu}^{(j)} = C_\mu^{(1)}\cdot C_\nu^{(2)}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,\ldots; j = 1,2)$.

Итак, применяя метод Фробениуса-Латышевой мы анализировали возможности построения асимптотических решений алгебраического уравнения Матье (1.1) в виде нормальных рядов Томе (3.1) и (3.2).

Показано связь между асимптотическими решениями алгебраического уравнения Матье (1.1) и уравнения Бесселя (4.1). Изучены произведения нормальных рядов Томе представляющий ряды Матье как решения уравнения в частных производных второго порядка (5.3).

Литература:

1. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. - М.: ИЛ, 1953. - 475 с.
2. Witteker E.T., Watson G.N. A course of Modern Analysis. Part 2. Transcendental functions. Cambridge. At the university Press. 1927, 515 pp.
3. Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. ИП Жанадилова С.Т. - Актобе, 2015. - 463 с.
4. Тасмамбетов Ж.Н. О построении решения уравнения Матье методом Фробениуса-Латышевой. // Вестник КарГУ, серия математика №3(83), 2016, - с. 76-86.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Абдылдаева Э.