Байсеркеева А.Б.

ЭКИ ӨЛЧӨМДҮҮ БУЛАК ФУНКЦИЯСЫН ФИНАЛДЫК КОШУМЧА ШАРТ БОЮНЧА АНЫКТОО ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫМДУУЛУГУ ЖӨНҮНДӨ

Байсеркеева А.Б.

О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА С ФИНАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ

A.B. Baiserkeeva

ON THE SOLVABILITY OF A TWO-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE SOURCE WITH FINAL OVERDETERMINATION

УДК: 517.95

Бул иште псевдопараболалык теңдемедеги эки өлчөмдүү булак функциясын аныктоо тескери маселеси изилденген. Тескери маселе теңдемедеги мейкиндиктеги өзгөрмөдөн көз каранды болгон белгисиз булак функциясын финалдык кошумча шарт боюнча аныктоо маселесинен турат. Каралган тескери маселе үчүн анын чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы далилденет.

Негизги сөздөр: *тескери маселе, псевдопараболалык тендеме, кошумча шарт, Галеркиндин ыкмасы.*

В работе исследована двумерная обратная задача определения источника в псевдопараболическом уравнении с финальным переопределением. Обратная задача состоит в определении неизвестную правую часть зависящего от пространственных переменных по финальному переопределению. Доказывается существование и единственность решения рассматриваемой обратной задачи.

Ключевые слова: *обратная задача, псевдопараболическое уравнение, условия переопределения, метод Галеркина.*

We have investigated two-dimensional inverse problem of determining a source in pseudoparabolic equation. The inverse problem is to determine the unknown right side of the time-dependent and spatial variables on a redefinition of the interior points. We prove existence and uniqueness of solutions to the inverse problem.

Key words: *inverse problem, pseudoparabolic equation, over determination conditions, Galerkin's method.*

Введение. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений изучены в работе [1], где имеется подробная библиография по этому вопросу.

Вопросы о разрешимости обратных задач определения источника для параболических уравнений с финальным переопределением изучались в работах [3,5], а в работах [1-3] исследованы различные одномерные обратные задачи определения источника с финальным переопределением для псевдопараболических уравнений.

Изучению смешанной задачи для двумерного псевдопараболического уравнения третьего порядка посвящена работа [3]. В данной работе рассматривается вопрос о разрешимости двумерной обратной задачи определения правой части в псевдопараболическом уравнении по финальному переопределению. Теорема единственности устанавливается с помощью априорных оценок, а теорема существования доказывается методом Галеркина.

Постановка задачи и основные результаты. В области Ω_T рассмотрим двумерное псевдопараболическое уравнение

$$u_t - \Delta_2(u_t + \alpha u) = f(x,y)h(t) + g(x,y,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

где $h(t), g(x,t) \in C^{(1)}(\overline{\Omega}_T)$ - известные, а $f(x,y)$ – неизвестная вещественные функции, $\Omega_T = \{(x,y,t) | (x,y) \in \Pi, t \in (0,T]\}$, $\Pi = \{(x,y) | x \in (0,\pi), y \in (0,\pi)\}$.

Δ_2 - лапласиан по переменным x и y, $\alpha = const > 0$.

Пусть решение уравнения (1) удовлетворяет условиям

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le \pi, \tag{2}$$

$$u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0, 0 \le y \le \pi, 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0, \quad 0\le x\le \pi, 0\le t\le T. \tag{4}$$

Обратная задача состоит в определении пары функций $\{f(x,y),u(x,y,t)\}$, если относительно решения прямой задачи (1) – (4) известна дополнительная информация

$$u(x,y,T)=\psi(x,y), \quad 0\le x\le \pi, \quad 0\le y\le \pi, \tag{5}$$

Пусть исходные функции задачи (1)-(5) удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi,\psi \in C^{(2)}([0,\pi]\times[0,\pi]),$$

и удовлетворяют условиям согласования:

$$\varphi(0,y)=\varphi(\pi,y)=0, \quad \varphi(x,0)=\varphi(x,\pi)=0,$$
$$\psi(0,y)=\psi(\pi,y)=0, \quad \psi(x,0)=\psi(x,\pi)=0.$$

Теорема. Пусть функции φ,ψ удовлетворяют перечисленным выше условиям. Кроме того $h\in C^{(2)}([0,T]), \ h>0, \ h'(t)>0, \ g\in C^{(1)}(0,T;L_2(\Pi)$. Тогда решение задачи (1) - (5) существует, единственно и удовлетворяет следующим условиям:

1) $u\in L_2(\Omega_T), \quad f\in L_2(\Pi), \quad \Delta_2 u=L_2(\Omega_T)$,

2) $u(x,y,t)$ удовлетворяет условиям (2) - (5),

3) (u,f) - решение уравнения (1).

Доказательство. Как и в работе [1], сначала докажем единственность решения обратной задачи (1) – (5).

1. Единственность. Пусть $g(x,t)=\varphi=\psi=0$ и пусть $\{u(x,y,t), f(x,y)\}$ решения задачи (1) – (5). Из (1) имеем

$$\frac{1}{h(t)}(u_t-\Delta_2(u_t+\alpha u))=f(x,y).$$

Скалярно умножив последнее равенство на u_t в $L_2(\Pi)$, получим

$$<\frac{1}{h(t)}(u_t-\Delta_2(u_t+\alpha u)),u_t>=<f(x,y),u_t>. \tag{7}$$

Так как $h\in C^{(1)}([0,T]), \quad u_t\in L_2(0,T;C(\bar{\Pi}))$, то учитывая граничные условия и условия теоремы 1, имеем

$$\frac{1}{h(t)}<u_t,u_t>=\frac{1}{h(t)}\iint\limits_{\Pi} u_t^2\,dxdy=\frac{1}{h(t)}\|u_t\|^2_{L_2(\Pi)},$$

$$-\frac{1}{h(t)}<\Delta_2 u_t,u_t>=-\frac{1}{h(t)}\iint\limits_{\Pi}(u_{xxt}+u_{yyt})u_t\,dxdy=\frac{1}{h(t)}\iint\limits_{\Pi}(u_{xt}^2+u_{yt}^2)dxdy=$$
$$=\frac{1}{h(t)}\left\|\nabla_{x,y}u_t\right\|^2_{L_2(\Pi)},$$

$$-\frac{\alpha}{h(t)} < \Delta_2 u, u_t > = -\frac{\alpha}{h(t)} \iint_{\Pi} (u_{xx} + u_{yy}) u_t \, dxdy = \frac{\alpha}{h(t)} \iint_{\Pi} (u_x u_{xt} + u_y u_{yt}) dxdy =$$

$$= \frac{\alpha}{2h(t)} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Pi} (u_x^2 + u_y^2) dxdy = \frac{\alpha}{2h(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \nabla_{x,y} u \right\|^2_{L_2(\Pi)},$$

$$\frac{\alpha}{2h(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \nabla_{x,y} u \right\|^2_{L_2(\Pi)} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\alpha}{2h(t)} \left\| \nabla_{x,y} u \right\|^2_{L_2(\Pi)} \right] + \frac{\alpha h'(t)}{2h^2(t)} \left\| \nabla_{x,y} u \right\|^2_{L_2(\Pi)}.$$

Тогда равенство (7) можно записать в виде

$$< \frac{1}{h(t)} (u - \Delta_2 (u_t + \alpha u)), u_t > = \frac{1}{h(t)} \left(\left\| u_t \right\|^2_{L_2(\Pi)} + \left\| \nabla_{x,y} u_t \right\|^2_{L_2(\Pi)} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\alpha}{2h(t)} \left\| \nabla_{x,y} u \right\|^2_{L_2(\Pi)} \right] +$$
$$+ \frac{\alpha h'(t)}{2h^2(t)} \left\| \nabla_{x,y} u \right\|^2_{L_2(\Pi)} = \frac{\partial}{\partial t} \left[< f(x,y), u_t(x,y,t) \right]. \qquad (8)$$

Далее, интегрируя (8) по $(0,T)$ с учетом $\varphi = \psi = g = 0$, получим

$$\int_0^T \left[\frac{\alpha h'(t)}{2h^2(t)} \left\| \nabla_{x,y} u \right\|^2_{L_2} + \frac{1}{h(t)} \left\| \nabla_{x,y} u_t \right\|^2_{L_2} + \frac{1}{h(t)} \left\| u_t \right\|^2_{L_2(\Pi)} \right] dt = 0,$$

т.е. $u_t = 0$, что с учетом условия $\varphi = 0$ дает $u = 0$ на $(0,T)$. А из уравнения (1) находим что $f(x,y) = 0$ на Π.

2. Существование решения. Рассмотрим уравнение, полученное из (1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{h(t)} (u_t - \Delta_2 (u_t + \alpha u)) \right] = \frac{\partial G(x,y,t)}{\partial t}, \quad G(x,y,t) = \frac{1}{h(t)} g(x,y,t) \qquad (9)$$

с начально-краевыми условиями (2) – (5).

Задачу (9), (2) – (5) будем решать методом Галеркина. Приближенное решение уравнения (9) будем искать в виде

$$u_n(x,y,t) = \sum_{i=1}^{n} u_{ni}(t) w_i(x,y), \qquad (10)$$

где $w_i(x,y)$ – собственные функции задачи

$$-\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} = \lambda_i w_i, \quad x \in (0,\pi),\ y \in (0,\pi),$$
$$w_i(0,y) = w_i(\pi,y) = 0, \qquad w_i(x,0) = w_i(x,\pi) = 0.$$

Очевидно, что $w_i(x,y) \in W_2^2(\Pi)$ и имеет вид

$$w_{n,m}(x,y) = X_n(x) Y_m(y) = \sin nx \sin mx, \quad \lambda_{n,m} = \mu_n + \nu_m = n^2 + m^2.$$

Система $\{w_i(x,y)\}$ образуют полную ортонормированную систему в $L_2(\Pi)$.

Неизвестные функции $u_n(t) = \{u_{n1}(t), u_{n2}(t), ..., u_{nn}(t)\}$ определим из условий

$$<\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{h(t)}(u_{nt}-\Delta_2(u_{nt}+\alpha u_n))\right), w_j(x,y)> = <G_t, w_j(x,y)>, \qquad (11)$$

$$u_{nj}(0)=u_{nj}(T)=0, \quad 1\le j\le n. \qquad (12)$$

Система (11) есть линейная система дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $u_{ni}(t), \quad 1\le i\le n$.

Докажем, что при условиях теоремы краевая задача (11), (12) имеет единственное решение $v_n(t)\in C^{(2)}(0,T)$. Для этого, как известно [4, с.41] достаточно доказать, что соответствующая однородная задача имеет лишь нулевое решение.

Пусть $u_{nj}(t)\in C^{(2)}(0,T), \quad j=1,...,n$ - решение однородной задачи (11), (12).

Умножим *j*–е уравнение системы (11) на -$\overline{u}_{nj}$ и просуммируем по *j* полученные равенства от 1 до *n*. Тогда получим

$$-<\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{h(t)}[\overline{u}_{nt}-\Delta_2(\overline{u}_{nt}+\alpha\overline{u}_n)]),\overline{u}_n>=0,$$

где $\overline{u}_n=\sum_{i=1}^{n}\overline{u}_{ni}(t)w_i(x,y)$.

Заметим, что

$$-<\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{h(t)}[\overline{u}_{nt}-\Delta_2(\overline{u}_{nt}+\alpha\overline{u}_n)]),\overline{u}_n>=-\frac{\partial}{\partial t}\left[<(\frac{1}{h(t)}[\overline{u}_{nt}-\Delta_2(\overline{u}_{nt}+\alpha\overline{u}_n)]),\overline{u}_n>\right]+$$
$$+<(\frac{1}{h(t)}[\overline{u}_{nt}-\Delta_2(\overline{u}_{nt}+\alpha\overline{u}_n)]),\overline{u}_{nt}>=0. \qquad (13)$$

Проинтегрировав последнее равенство по $(0,T)$, с учетом левой части равенства (8) при $u=\overline{u}_n$ и нулевых условий (12), имеем:

$$\int_0^T\left[\frac{\alpha h'(t)}{2h^2(t)}\left\|\nabla_{x,y}\overline{u}_n\right\|^2_{L_2}+\frac{1}{h(t)}\left\|\nabla_{x,y}\overline{u}_{nt}\right\|^2_{L_2}+\frac{1}{h(t)}\left\|\overline{u}_{nt}\right\|^2_{L_2(\Pi)}\right]dt=0.$$

Отсюда $\overline{u}_n(x,t)=0$, и в силу линейной зависимости $w_i(x)$ и условия (12), имеем $\overline{u}_{ni}(t)=0$ на $(0,T), \quad 1\le i\le n$.

Следовательно, для любой функции $\frac{\partial G}{\partial t}\in C(0,T;L_2(0,1))$ задача (11), (12) имеет единственное решение $v_n(t)\in C^{(2)}(0,T)$.

Теперь оценим норму $u_n(x,t)=\sum_{i=1}^{n}u_{ni}(t)w_i(x)$ через данные задачи (2) – (5). Для этого умножим j-е уравнение системы (9) на $-u_{nj}(t)$ и просуммируем по *j* от 1 до *n*. Тогда имеем

$$-<\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{h(t)}[u_{nt}-\Delta_2(u_{nt}+\alpha u_n)]),u_n>=-<G_t,u_n>. \qquad (14)$$

Отсюда, учитывая равенство (13) для $\overline{u}_n = u_n$, равенство (8), условие (11) и то, что

$$-< G_t, u_n > = \frac{\partial}{\partial t}[< G, u_n >] + < G, u_{nt} >,$$

$$\left|< G, u_{nt} >\right| \le \varepsilon^{-1}\|G\|^2_{L_2} + \varepsilon\|u_{nt}\|^2_{L_2},$$

где $\varepsilon < \min\limits_{t\in[0,T]} \frac{1}{2h(t)}$, из равенства (14) проинтегрировав по $(0,T)$, получим

$$\int_0^T \left[\frac{\alpha h'(t)}{2h^2(t)}\|\nabla_{x,y}\overline{u}_n\|^2_{L_2} + \frac{1}{h(t)}\|\nabla_{x,y}\overline{u}_{nt}\|^2_{L_2} + \frac{1}{h(t)}\|\overline{u}_{nt}\|^2_{L_2(\Pi)}\right]dt \le \int_0^T [\varepsilon^{-1}\|G\|^2_{L_2} + \varepsilon\|u_{nt}\|^2_{L_2}]dt$$

или

$$\int_0^T [\|u_{nt}\|^2_{L_2} + \|\nabla_{x,y}\overline{u}_n\|^2_{L_2} + \|\nabla_{x,y}\overline{u}_{nt}\|^2_{L_2}]dt \le C. \quad (15)$$

Здесь и в дальнейшем через *C* обозначим различные константы, не зависящие от *n*, точнее зависящие только от Ω_T, $G(x,y,t)$, $h(t)$, α .

Чтобы получить оценку на $\|\Delta_2 u\|$, $\|\Delta_2 u_t\|$, умножим j-е уравнение (11) на $-\lambda_j w_j = \Delta_2 w_j$ и просуммируем по j от 1 до n. Тогда получим

$$< \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{h(t)}[u_{nt} - \Delta_2(u_{nt} + \alpha u_n]), \Delta_2 u_n > = < G_t, \Delta_2 u_n >. \quad (16)$$

Преобразуем левую часть последнего равенства следующим образом:

$$\begin{aligned} &< \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{h(t)}[u_{nt} - \Delta(u_{nt} + \alpha u_n)]), \Delta_2 u_n > = \frac{\partial}{\partial t}[\frac{1}{h(t)} < (u_{nt} - \Delta_2(u_{nt} + \alpha u_n), \Delta u_n >] - \\ &- < \frac{1}{h(t)}(u_{nt} - \Delta_2(u_{nt} + \alpha u_n), \Delta_2 u_{nt} >. \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} &- < \frac{1}{h(t)}(u_{ntt} - \Delta_2(u_{nt} + \alpha u_n), \Delta_2 u_{nt} > = \frac{1}{h(t)}\|\nabla_{x,y}u_{nt}\|^2_{L_2} + \\ &+ \frac{1}{h(t)}\|\Delta_2 u_{nt}\|^2_{L_2} + \frac{\alpha}{2h(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left[\|\Delta_2 u_n\|^2_{L_2}\right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда, учитывая равенства (17),(18), условия (12) и то, что

$$\left|< G_t, \Delta_2 u_n >\right| \le \varepsilon^{-1}\|G_t\|^2_{L_2} + \varepsilon\|\Delta_2 u_n\|^2_{L_2},$$

из (16) интегрированием по $(0,T)$, получим

$$\int_0^T [\frac{1}{h(t)}\|\nabla_{x,y}u_{nt}\|^2_{L_2} + \frac{1}{h(t)}\|\Delta_2 u_{nt}\|^2_{L_2} + \frac{h_t}{2h^2}\|\Delta_2 u_n\|^2_{L_2}]dt \le \int_0^T [\varepsilon^{-1}\|G_t\|^2_{L_2} + \varepsilon\|\Delta_2 u_n\|^2_{L_2}]dt$$

Или

$$\int_0^T (\|\nabla_{x,y}u_{nt}\|^2_{L_2} + \|\Delta_2 u_{nt}\|^2_{L_2} + \|\Delta_2 u_n\|^2_{L_2})dt \le C. \qquad (19)$$

Неравенства (15),(19) показывают, что

$$\|u_{nt}\|^2_{L_2} \le C, \ \|\nabla_{x,y}u_{nt}\|^2_{L_2} \le C, \ \|\nabla_{x,y}\bar{u}_n\|^2_{L_2} \le C, \ \|\Delta_2 u_n\|^2_{L_2} \le C, \|\Delta_2 u_{nt}\|^2_{L_2} \le C. \qquad (20)$$

Так как $L_2(0,T;W_2^1(\Pi))$ гильбертово пространство, то последовательность $\{u_n\}$ содержит слабо сходящуюся к $u(x,y,t)$ подпоследовательность $\{u_k\}$, а из оценки $\|u_{nt}\|_{L_2} \le C$ следует, что и последовательность $\{u_{nt}\}$ содержит слабо сходящуюся к $u_t(x,y,t)$ в $L_2(\Omega_T)$ подпоследовательность. Аналогично на основании оценок (20) можно показать, что последовательности $\{\Delta_2 u_n\}$, $\{\Delta_2 u_{nt}\}$ также слабо сходится к $\Delta_2 u$, $\Delta_2 u_t$ соответственно в $L_2(\Omega_T)$.

Теперь докажем, что $u(x,y,t)$ удовлетворяет условиям (2) – (5). Сначала докажем, что для $u(x,y,t)$ выполнены условия (5). Пусть $\psi(x,y,t) \in C^{(1)}(0,T;L_2(\Omega))$ и $\psi(x,y,0) = 0$. Так как u_n и u_{nt} слабо сходится соответственно к $u(x,y,t)$, $u_t(x,y,t)$ в $L_2(0,T)$, то можно заметить, что при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &\int_0^T < u_n, \psi > dt \to \int_0^T < u, \psi > dt, \\ &\int_0^T < u_{nt}, \psi > dt \to \int_0^T < u_t, \psi > dt. \end{aligned} \qquad (21)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} &\int_0^T < u_{nt}, \psi > dt = -\int_0^T < u_n, \psi_t > dt, \\ &\int_0^T < u_t, \psi > dt = -\int_0^T < u, \psi_t > dt + < u(x,y,T), \psi(x,y,T) > . \end{aligned} \qquad (22)$$

Из (21), (22) следует, что $\langle u(x,y,T), \psi(x,y,T)\rangle = 0$; в силу произвольности $\psi(x,y,t)$ находим, что $u(x,y,T) = 0$. Аналогично доказывается, что функция $u(x,y,t)$ удовлетворяет условию (2). Кроме того, из оценки (20) и определения $f(x,y)$ вытекает что $\|f(x,y)\|_{L_2(\Pi)} \le C$. Теорема доказана.

Литература:

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. - 183 с.
2. Аблабеков, Б.С. О разрешимости обратной задачи для псевдопараболического уравнения // Вестн. КГНУ. Сер. Естеств.-техн. науки. –1999. –Вып. 1,ч.1. -С. 5-10.
3. Аблабеков Б.С. Краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений и их связь с обратными задачами // Вестн. КГНУ. Сер. Естеств.-техн. науки. - 1997. - Вып. 1,ч.1. - С. 5-11.
4. Аблабеков Б.С., Байсеркеева А.Б. О разрешимости смешанных задач для двумерного псевдопараболического уравнения // Приволжский научный вестник. - 2016. №10(62). - С.5-9.
5. Амиров А.Х. Разрешимость обратных задач для уравнения второго порядка // Вопросы корректности и методы исследования обратных задач. – Новосибирск, 1986. – С. 3–19.
6. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526с.
7. Прилепко А.И., Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Мат. сборник.-1992.-Т.183, №4.-С. 49 –68.
8. Rundell W. Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary date // Appl. Anal. -1980. -Vol.10, №2. -P.231-242.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.