Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б.

АНАЛИТИКАЛЫК ФУНКЦИЯЛУУ СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮККӨН ТЕҢДЕМЕЛЕР ТЕОРИЯСЫНДАГЫ ТУРУКТУУЛУКТУН ЖОГОЛУШУНУН УЗАРТЫЛЫШЫ ЖАНА ЧЕКТИК КАТМАР СЫЗЫКТАР

Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б.

ЗАТЯГИВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ И ПОГРАНСЛОЙНЫЕ ЛИНИИ В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ.

K.S.Alybaev, K.B.Tampagarov

TIGHTENING OF STABILITY LOSS AND BOUNDARY LAYER LINES IN THE THEORY OF SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS WITH ANALYTIC FUNCTIONS

УДК:517.9

В данной работе рассматриваются сингулярно возмущенные уравнения с аналитическими функциями. Точка покоя присоединенного уравнения в части рассматриваемого отрезка действительной оси теряет устойчивость. Введено понятие область притяжения точки покоя. Доказано, что в комплексной плоскости существует область притяжения содержащий данный отрезок. Далее исследована связь области притяжения и погранслойной линии.

***Ключевые слова**. сингулярно возмущенные аналитические функции, присоединеная система, точка покоя, гармонические функции, линии уровня, асимптотика.*

Бул жумушта аналитикалык функциялуу сингулярдык дүүлүккөн теңдемелер каралды. Биргелештирилген теңдеменин тынч абал чекити чыныгы октогу кесиндинин бөлүгүндө туруксуз болот. Тынч абалга тартылуу област түшүнүгү киргизилди. Комплекстик тегиздикте, каралып жаткан кесиндини камтыган, тартылуу областын жашашы далилденди. Тартылуу областын жана чектик катмар сызыктын байланышы изилденди.

***Негизги сөздөр.** сингулярдык дүүлүгүү, аналитикалык функциялар, биргелештирилген система, тынч абал чекити, гармоникалык функция, деңгээл сызыктар, асимптотика.*

In this paper we consider singularly perturbed equations with analytic functions. The rest point of the adjoint equation in the part of the considered segment of the real axis loses stability. The concept of the attraction domain of a rest point is introduced. It is proved that in the complex plane there exists an area of attraction containing a given segment. Next, we study the connection between the region of attraction and the boundary layer.

***Keywords.** Singularly perturbed analytic functions, adjoint system, rest point, harmonic functions, level lines, asymptotics.*

Обозначения

N, R, C – соответственно множество натуральных, действительных и комплексных чисел.

$0 < \varepsilon$ – малый параметр.

$\Omega \subset$ C и Ω - односвязная область.

$t = t_1 + it_2, t_1 t_2 -$ действительные переменные , $i = \sqrt{-1}$

$Q(\Omega)$ – означает пространство аналитических функций в области Ω.

$[t_0, T]$ – отрезок действительной оси, причем $[t_0, T] \subset \Omega$.

с.в.у. – сингулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения.

$\forall t \in H \left(A(t)\right)$ – для любого t из множества H справедливо высказывание $A(t)$.

Введение

Одной из центральных проблем в теории с.в.у. является выявление множеств, к которым притягиваются решения заданных с.в.у. К таким множеством относятся решения вырожденных уравнений [1].

В наиболее общем виде данную проблему для решений начальных задач с.в.у. можно сформулировать в следующем виде.

Пусть задана система

$$\varepsilon\, x'(t, \varepsilon) = f\left(\varepsilon, t, x(t, \varepsilon)\right) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0, \varepsilon) = x_0, \tag{2}$$

где $x(t, \varepsilon) = \left(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), \dots, x_n(t, \varepsilon)\right), t \in [t_0, T]$.

При $\varepsilon = 0$ из (1) получаем соответствующую вырожденную систему

$$f\big(0, t, \xi(t)\big) = 0. \tag{3}$$

Пусть система (3) имеет непрерывное$\xi(t)$решение на отрезке $[t_0, T]$.

Задача. При каких условиях на правые части системы (1) выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(t,\ \varepsilon) = \xi_0(t) \quad \text{для} \quad t_0 \le t \le T \tag{4}$$

Впервые данная задача, для систем гораздо более общего вида, решена в работе[ ], введением понятия «присоединенная система».

Следующая система

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = f\big(o, t, y(\tau)\big), \tag{5}$$

где $0 \le \tau < +\infty$; $\quad t -$ параметр ;

называется присоединенной системой системы (1).

В [ ] при определенных условиях на правую часть системы (1) доказана

справедливость предельного соотношения (4) на интервале $t_0 < t \le T$.

Одним из условий сформулированных в [1], является устойчивость точки покоя $y(\tau) = \xi_0(t)$.

Впервые в [2] исследована система второго порядка когда нарушается устойчивость точки покоя на некотором отрезке действительной оси. Доказано, что на этом промежутке справедливо предельный переход (4)

Результаты данной работы обобщены в [3-4]. Во всех перечисленных работах исследования проведены в некоторых областях комплексной плоскости содержащие отрезок действительной оси.

В работе [5] проведены необходимые определения и доказаны, что для решений с.в.у. с аналитическими функциями существуют погранслойные линии. Существование погранслойных линий можно назвать специфическими свойствами таких уравнений.

Постановка задачи.

Пусть рассматривается скалярное уравнение

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + f\big(\varepsilon, t, z(t,\varepsilon)\big). \tag{6}$$

сначальным условием,

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0, \quad \text{где} \quad t \in \Omega \text{ и } [t_0, T] \subset \Omega. \tag{7}$$

Пусть вырожденное уравнение, соответствующее (6) имеет решение

$$\xi_0(t) \in Q(\Omega)$$

U.1. Пусть $Re\, a(t) < 0$ при $t_0 \le t < T_0$; $Re\, a(T_0) = 0$; $Re\, a(t) > 0$ при $T_0 < t \le T$.

Если существует область $\Omega_0 \subset \Omega$, причем $[t_0, T] \subset \Omega_0$и$\forall\ t \in \Omega_0$ $(\lim_{\varepsilon\to 0} z(t,\varepsilon) = \xi_0(t))$, то будем говорить, что на отрезке $[t_0, T]$ происходит затягивание потери устойчивости, а Ω_0 -область притяжения решения $\xi_0(t)$.

Задача. Выяснить взаимосвязь области притяжения и погранслойных линий.

Решение задачи.

Поставленную задачу решим предполагая в (6)

$$f\big(\varepsilon, t, z\,(t,\varepsilon)\big) \equiv b(t). \tag{9}$$

Пусть выполняются условия :U.1.

U.2.$a(t), b(t) \in Q(\Omega), [t_0, T] \subset \Omega$.

U.3. $\forall\ t \in \Omega\ (\mathfrak{I}m a(t) \neq 0)$.

Решение задачи (6) – (7) при условии (9) можно представить в виде

$$z(t,\varepsilon) = z^0 \exp\frac{F(t)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{p(t_0,t)} b(\tau)\exp\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}\, d\tau, \tag{10}$$

где $F(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$, $p(t_0, t)$ − произвольный путь полностью принадлежащей Ω и соединяющая точки t_0 и $t \in \Omega$.

Решение задачи, разделим на две части: топологическая и аналитическая.

Топологическая часть.

Пусть $Re\, F(t) = F_1(t_1, t_2), \Im m F(t) = F_2(t_1, t_2)$

Определение. Множество $(L_k) = \{t \in \Omega \,|F_k(t_1, t_2) = L_k - const\}$ назовем линией уровня функций $F_k(t_1, t_2)(k = 1{,}2)$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть выполняются условия U.1 – U.3. Тогда существуют точки $(t_{01}; 0), (\mathrm{T}_{01}; 0)$; $t_0 \leq t_{01} < T_0 < T_{01} \leq T)$ и линия уровня(L_0)соединяющие эти точки.

Доказательство. Возьмем точку $(T_0; 0)$ и функцию $F_1(t_1, t_2)$. При $t_2 \equiv 0$ функция $F_1(t_1, 0)$, согласно условия U.1. на отрезке$[t_0, T]$возрастает от точки $(\mathrm{T}_0; 0)$ по двум направлениям (отT_0 до t_0 и от T_0 до T). Существует бесконечное множество точек из интервалов $[t_0, \mathrm{T}_0)$, $(\mathrm{T}_0, \mathrm{T}]$ и значение функции $F_1(t_1, 0)$ в этих точках будут равны. Пусть $t_{01} \in [t_0, \mathrm{T}_0), \mathrm{T}_{01} \in (\mathrm{T}_0, T]$ и $F_1(t_{01}, 0) = F_1(\mathrm{T}_{01}, 0) = L_0$. По определению $L_0 > F_1(T_0, 0)$.

Теперь рассмотрим функцию $F_1(\mathrm{T}_0, t_2)$ в части прямой $t_1 = \mathrm{T}_0$ принадлежащей области Ω.

Точка $(T_0, 0)$ принадлежит этой части и является ее внутренней точкой. Согласно условия U.3 функция $F_1(\mathrm{T}_0, t_2)$ возрастает от точки $(T_0, 0)$ только в одном направлении, в зависимости от знака $\Im m a(t)$. Тогда в этом направлении существует единственная точка $(\mathrm{T}_0;\, t_{20})$ и значение функции $F_1(\mathrm{T}_0, t_2)$в этой точке будет равна $F_1(\mathrm{T}_0, t_{20}) = L_0$. Произвольность выбора точек t_{01} и T_{01} гарантируют существование точки (T_0, t_{20}). Докажем, что (L_0) будет линией уровня соединяющие точки $(t_{01}; 0)$, (T_0, t_{20}).

Возьмем произвольную точку $\tilde{t}_1$ на интервале $[t_0, \mathrm{T}_0)$ и через эту точку проведем прямую $t_1 = \tilde{t}_1$. Рассмотрим функцию $F_1(\tilde{t}_1, t_2)$ в части прямой принадлежащей области Ω. Согласно условия U.1 справедливо $F_1(t_{01}; 0) > F_1(\tilde{t}_1, 0) > F_1(\mathrm{T}_0, 0)$. Как было сказано выше существует направление, где функция $F_1(\tilde{t}_1, t_2)$ возрастает. Следовательно в рассматриваемой части существует точка $(\tilde{t}_1,\ \tilde{t}_2)$ и $F_1(\tilde{t}_1,\ \tilde{t}_2) = L_0$.

В силу произвольности точки $\tilde{t}_1$ получим множество точек $(\tilde{t}_1,\ \tilde{t}_2)$ и это множество определяет часть линии (L_0) соединяющего точки $(t_{10}; 0)$ и(T_0, t_{20}).

Поступая также получим часть (L_0) соединяющую точки$(\mathrm{T}_0; t_{20})$ и $(\mathrm{T}_{01}; 0)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Существует множество $\{(L_0)\}$ соединяющие точки интервалов $[t_{10}; \mathrm{T}_0)$ и $(\mathrm{T}_0; \mathrm{T}]$.

Доказательство. Перемещение точки t_{10} в направлении к T_0 влечет за собой перемещение T_{10} к T_0 и t_{20} к T_0. Это приводит к перемещению (L_0), что определяет множество $\{(L_0)\}$ соединяющего точки интервалов $[t_{10}, T_0)$и $(T_0; \mathrm{T}]$. Лемма доказана.

Лемма 3. Существует sup $\{(L_0)\}$.

Доказательство. Множество$\{(L_0)\}$ ограничена сверху, следовательно существует sup $\{(L_0)\}$, причем sup $\{(L_0)\} \in \{(L_0)\}$. Лемма доказана.

На основе лемм 1-3 без ограничения общности и для простоты изложения, будем считать sup $\{(L_0)\}$=(L_{00}) и эта линия соединяет точки $(t_0, 0)$, (T, 0).

Область ограниченная отрезком $[t_0, T]$ действительной оси и линией (L_{00}) обозначим $\Omega_0 \subset \Omega$.

Аналитическая часть

Лемма 4. $\forall t \in \Omega_0\ (ReF(t) \leq 0)$.

Доказательство. Возьмём произвольную точку $(\tilde{t}_1;\ \tilde{t}_2) \in (L_{00})$. Из этой точки проведем прямую $(\tilde{\Pi}) = \{(t_1; t_2) \in C | t_1 = \tilde{t}_1, -\infty < t_2 < \infty\}$.

В части прямой принадлежащее Ω_0 функция $ReF(t)$ убывает, согласно условия U.3. Следовательно для любой точки $(t_1;\ \tilde{t}_2)$ принадлежащее этой части $ReF(\tilde{t}_1 + it_2) < 0$.

Лемма доказана.

Следующая теорема выражает связь между областью протижения и погранслойной линии.

Теорема. Пусть выполняется условия U.1-U.3.

Тогда: 1. Область Ω_0 будет областью притяжения решения $\xi_0(t)$.

2. Линия (L_{00}) – погранслойная линия.

Функцию (10) будем рассматривать в Ω_0. Выберем путь интегрирования.

Путь состоит из части (L_{00}) соединяющего точки $(t_0; 0)$, $(t_1; \tilde{t}_2)$ и прямолинейного отрезка соединяющего точки $(t_1; \tilde{t}_2)$, $(t_1; t_2)$

Рассмотрим уравнение линии (L_{00})

$$F_1(t_1, t_2) = 0 \qquad (11)$$

По определению $F_1(t_0, 0) = F_1(T, 0) = 0$

На основании условия U.3 из уравнения (11) определяется одназначная, бесконечно дифференцируемая функция

$$t_2 = \varphi(t_1)$$

с областью определения $t_0 \leq t_1 \leq T$.

Учитывая выбранный путь интегрирования функцию (10) представим в виде

$$z(t,\varepsilon) = z^0 exp\frac{F(t)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t_1} b\big(\tau_1 + i\varphi(\tau_1)\big)exp\frac{F(t) - iF_2\big(\tau_1\varphi(\tau_1)\big)}{\varepsilon} \times$$

$$\times\big(1 + i\varphi'(\tau_1)\big)d\tau_1 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tilde{t}_2}^{t_2} b(t_1 + i\tau_2)exp\frac{F(t) - F(t_1 + i\tau_2)}{\varepsilon} id\tau_2. \qquad (12)$$

Введем обозначение

$F_2(\tau_1, \varphi(\tau_1) \equiv F_{21}(\tau_1), \varphi(\tau_1) = iF'_{21}(\tau_1) \cdot (1 + i\varphi'^{(\tau_1)} b\big(\tau_1 + i\varphi(\tau_1)\big)$,

$F(t_1 + i\tau_2) = F_0(\tau_2), \varphi_2(\tau_2) \equiv -ib(t_1 + i\tau_2) \cdot F'_0(\tau_2)$.

В (12), первый и второй интегралы проинтегрировав по частью получим

$$z(t,\varepsilon) = z^0 exp\frac{F(t)}{\varepsilon} + \varphi_1(t_1)exp\frac{F(t) - iF_{21}(t_1)}{\varepsilon} - \varphi_1(t_0)exp\frac{F(t)}{\varepsilon} -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \varphi'_1(\tau_1)exp\frac{F(t) - iF_{21}(\tau_1)}{\varepsilon}d\tau_1 + \varphi_2(t_2) - \varphi_2(\tilde{t}_2)exp\frac{F(t) - F_0(\tilde{t}_2)}{\varepsilon} -$$

$$-\int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \varphi'_2(\tau_2)exp\frac{F(t) - F_0(\tau_2)}{\varepsilon}d\tau_2\,. \ (13)$$

К интегралом в (13) применяя интегрирование по частьям убеждаемся, что они имеют порядок ε.

Таким образом имеем следующее асимптотическое представление

$$z(t,\varepsilon) = \big(z^0 - \varphi_1(t_0)\big)exp\frac{F(t)}{\varepsilon} + \varphi_1(t_1)exp\frac{F(t) - iF_{21}(t_1)}{\varepsilon} +$$

$$+\varphi_2(t_2) - \varphi_2(\tilde{t}_2)exp\frac{F(t) - F_0(\tilde{t}_2)}{\varepsilon} + O(\varepsilon)(14)$$

Если $t \in (L_{00})$, то предел $\lim_{\varepsilon \to 0} z(t, \varepsilon)$ не существует, но согласно леммы 4 из (14) вытекает . $\forall t \in (L_{00})(|z(t, \varepsilon)| \le M$ – некоторая постоянная).

Если $t \in \Omega_0$, но $t \notin (L_{00})$, тогда из (14) вытекает предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z(t, \varepsilon) = \xi_0(t) \equiv -b(t)/a(t).$$

Пусть $(\widetilde{t_1};\ \tilde{t}_2)$ произвольная точка принадлежащая (L_{00}). Из этой точки проведем прямую $(\widetilde{\Pi})$. На этой прямой выберем отрезок, по которой функция $F_1(\tilde{t}_1, t_2)$ возрастает. Такой отрезок существует и он не принадлежит Ω_0.

Пусть $(\tilde{t}_1, t_2)$ принадлежит этому отрезку. По определению $F_1(\tilde{t}_1, t_2) > 0$.

Из (13) получим

$|z(t, \varepsilon)| \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом $(\Omega_0 - L_{00})$ является областью притяжения, $a, (L_{00})$ – погранслойной линией, согласно принятых определений из [5]

Теорема доказана.

Литература:

1. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений содержащие малые параметры при производных //Мат.сб. – 1952.- Т.31(73), №3. – С. 575-586.
2. Шишкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных //Докл. АН СССР. – 1973. – Т.209 №3. – С. 576-579.
3. Каримов С.К. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости покоя в плоскости “быстрых” движений. Дисс.... доктора физ.-мат.наук: 01.01.02, - Ош, 1983. – 260 с.
4. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости //Вестник КГНУ. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001г. – С. 190-200.
5. Панков П.С., Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б., Нарбаев М.Р. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями //Вестник ОшГУ, 2013-№1 (специальный выпуск). – С. 227-231.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Алымкулов К.А.