МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCE

Омуралиев А.С., Имаш кызы Мээрим

КӨП ӨЛЧӨМДҮҮ ЧЕК КАТМАРЛУУ СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН ПАРАБОЛАЛЫК МАСЕЛЕ

Омуралиев А.С., Имаш кызы Мээрим

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С МНОГОМЕРНЫМИ ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ

A.S. Omuraliev, Imash kyzy Meerim

SINGULARLY PERTURBED PARABOLIC PROBLEM WITH MULTIDIMENSIONAL BOUNDARY LAYERS

УДК: 519.633

Иштин максаты *көп өлчөмдүү сингулярдуу козголгон параболалык маселенин чыгарылышынын асимптотасын тургузуу. Тургузулган асимптота көп өлчөмдүү параболалык чек катмар функцияны камтыйт. Мындан сырткары экспоненттик, ошондой эле экспоненттик жана көп өлчөмдүү чек катмар функциялар көбөйтүндүсү түрүндө берилген бурчтук чек катмар функцияларды камтыйт.*

Негизги сөздөр: *регулярланган асимптота, сингулярдуу козголгон параболалык маселе, көп өлчөмдүү параболалык, бурчтук жана экспоненттик чек катмарлуу функция..*

Цель данной работы *– построение регуляризованной асимптотики решения многомерной сингулярно возмущенной параболической задачи. Построенная асимптотика содержит многомерную параболическую погранслойную функцию. Кроме того, она содержит экспоненциальную, угловые погранслойные функции, описываемые произведением погранслойной функции экспоненциального типа и многомерной параболической погранслойной функции.*

Ключевые слова: *регуляризованная асимптотика, сингулярно возмущенная параболическая задача, многомерная параболическая, угловая и экспоненциальная погранслойная функция.*

The aim of this paper *is to construct a regularized asymptotics of the solution of a multidimensional singularly perturbed parabolic problem. The constructed asymptotic contains a multidimensional parabolic boundary layer function. In addition, it contains exponential, angular boundary layer functions, described by the product of a boundary layer function of exponential type and a multidimensional parabolic boundary layer function.*

Key words: *regularized asymptotics, singularly perturbed parabolic problem, multidimensional parabolic, angular and exponential boundary layer function.*

Рассмотрим первую краевую задачу для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon\partial_t u - \varepsilon^2\Delta u - b(t)u(x,t,\varepsilon) = f(x,t), \quad (x,t)\in G = \Omega\times(0,T] \qquad (1)$$

$$u\big|_{t=0} = h(x), \qquad u\big|_{x_1=l-1} = u\big|_{x_2=l-1} = 0, \qquad l = 1,2, \quad x = (x_1, x_2), \qquad (2)$$

где, заданная функция гладкая своих аргументов и $\forall t\in[0,\tau]$ функция $b(t) < 0$, $\Delta \equiv \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$, $h(0) = h(1) = 0$, $\Omega = (0,1)\times(0,1)$.

Вводя, наряду с независимыми переменными (x, y, t), регуляризующие переменные [1]

$$z = \frac{t}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}, \quad \mu = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t b(s)ds \equiv \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \quad \xi_{e,r} = \frac{(-1)^{r-1}(x_e - (r-1))}{\varepsilon},$$

$$\eta_{e,r} = \frac{(-1)^{r-1}(x_e - (r-1))}{\sqrt{\varepsilon^3}}, \qquad e,r = 1,2 \qquad (3)$$

для расширенной функции $u(x,t,\xi,\eta,\tau,\mu,\varepsilon)$ такой, что

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)\big|_{\chi=\varphi(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,t,\varepsilon), \qquad \chi = (\xi,\eta,\tau,\mu), \qquad M = (x,t,\chi), \qquad (4)$$

$$\xi=(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{21},\xi_{22}),\qquad \eta=(\eta_{11},\eta_{12},\eta_{21},\eta_{22}),$$

$$\varphi(x,t,\varepsilon)=\left(\frac{x_1}{\varepsilon},\frac{1-x_1}{\varepsilon},\frac{x_2}{\varepsilon},\frac{1-x_2}{\varepsilon},\frac{x_1}{\sqrt{\varepsilon^3}},\frac{1-x_1}{\sqrt{\varepsilon^3}},\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon^3}},\frac{1-x_2}{\sqrt{\varepsilon^3}},\frac{t}{\varepsilon^2},\frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right),$$

на основании (3)-(4) найдем

$$\partial_t u\equiv\left(\partial_t\tilde{u}+\frac{1}{\varepsilon^2}\partial_t\tilde{u}+\frac{b(t)}{\varepsilon}\partial_\mu\tilde{u}+\frac{1}{\varepsilon}\partial_z\tilde{u}\right),$$

$$\partial_{x_e}u\equiv(\partial_{x_e}\tilde{u}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{r=1}^{2}(-1)^{r-1}\left(\partial_{\xi_{er}}\tilde{u}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\partial_{\eta_{er}}\tilde{u})\right)_{\chi=\psi(x,t,\varepsilon)},$$

$$\partial^2_{x_e}u\equiv\left(\partial^2_{x_e}\tilde{u}+\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{r=1}^{2}\left[\partial^2_{\xi_{er}}\tilde{u}+\frac{1}{\varepsilon}\partial^2_{\eta_{er}}\tilde{u}+(-1)^{r-1}\frac{2}{\varepsilon}\left(\partial^2_{x_e\xi_{er}}\tilde{u}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\partial^2_{x_e\eta_{er}}\tilde{u}\right)\right]\right)_{\chi=\psi(x,t,\varepsilon)},$$ с

учетом последних и (4) в место задачи (1), (2) поставим расширенную задачу

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{u}\equiv\varepsilon\partial_t\tilde{u}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\partial_t\tilde{u}-\Delta_\eta\tilde{u}\right)+b(t)\left(\partial_\mu\tilde{u}-\tilde{u}\right)+\left(\partial_z\tilde{u}-\Delta_\xi\tilde{u}\right)-\varepsilon^2\Delta\tilde{u}-$$

$$-\sqrt{\varepsilon}L_{\eta,x}\tilde{u}-\varepsilon L_{\xi,x}\tilde{u}=f(x,t),M\in Q \tag{5}$$

$$\tilde{u}\big|_{t=\tau=\mu=0}=h(x),\quad \tilde{u}\big|_{\partial\Omega}=0,\quad \Delta_\xi\equiv\sum_{e,r=1}^{2}\partial^2_{\xi_{e,r}},\qquad \Delta_\eta=\sum_{e,r=1}^{2}\partial^2_{\eta_{e,r}},$$

$$L_{\eta,x}=2\sum_{e,r=1}^{2}(-1)^{r-1}\partial^2_{x_e,\eta_{e,r}},\quad L_{\xi,x}=2\sum_{e,r=1}^{2}(-1)^{r-1}\partial^2_{x_e,\xi_{e,r}},\qquad Q=\Omega\times(0,T]\times(0,\infty),$$

которая регулярна по ε при $\varepsilon\to 0$.

Решение расширенной задачи (5) ищем в виде ряда

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^k u_k(M), \tag{6}$$

для коэффициентов которого получим задачи

$$T_0u_0\equiv\partial_t u_\nu-\Delta_\eta u_\nu=0,\qquad \nu=0,1,$$

$$T_0u_2=T_1u_0+f(x,t),T_1\equiv-b(t)\partial_\mu+b(t)-\partial_z+\Delta_\xi,$$

$$T_0u_k=T_1u_{k-2}+L_{\eta,x}u_{k-3}-\partial_t u_{k-4}+L_{\xi,x}u_{k-4}+\Delta u_{k-6},$$

$$u_0(M)\big|_{t=\tau=\mu=0}=h(x),\ \ u_k(M)\big|_{t=\tau=\mu=0}=0,_{\text{n}}\ \ u_k(M)\big|_{\partial q}=0, \tag{7}$$

Введем пространство функций

$$U_0=\left\{Y(N):Y(N_1)=\sum_{e,r=1}^{2}Y_1\left(N_{e,r}\right),\left|Y_1\left(N_{e,r}\right)\right|<c\exp\left(-\frac{\eta^2_{e,r}}{8\tau}\right),N_{e,r}=(x,t,\eta_{e,r})\right\}$$

$$U_1=\left\{Y_2:\ Y_2\left(N_{1,e},N_{2,r}\right)=\sum_{\{e,r=1\}}^{2}Y_2^{e,r}\left(N_{1,e},N_{2,r}\right),\quad \left|Y_2^{e,r}\right|<c\exp\left(\frac{\eta^2_{1,l}+\eta^2_{2,r}}{8\tau}\right)\right\}$$

$$U_2=\left\{\omega(N_2)=\left[c(x,t)+\sum_{e,r=1}^{2}\omega^{e,r}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_{er}}{2\sqrt{z}}\right)+\sum_{e,r=1}^{2}z^{e,r}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_{1e}}{2\sqrt{z}}\right)erfc\left(\frac{\xi_{2r}}{2\sqrt{z}}\right)\right]\exp(\mu)\right\}$$

из которых составим новое пространство

$$U\ =U_0\oplus U_1\oplus U_2$$

в котором будут решаться итерационные задачи (7).

Лемма 1. Пусть $H_1(N_{e,r})\in U_0$. Тогда задача

$$\partial_\tau Y_1=\partial^2_{\eta_{e,r}}Y_1+H_1(N_{e,r}),\quad Y_1\big|_{\tau=0}=0,\quad Y_1\big|_{\eta_{e,r}=0}=d^{e,r}(x,t), \tag{8}$$

однозначна разрешима в U_0.

Доказательство. Решение задачи (8) представимо в виде

$$Y_1(N_{e,r})=d^{e,r}(x,t)erfc\frac{\eta_{e,r}}{2\sqrt{\tau}}u_1+I(N_{e,r}).$$

На основании леммы из [2] эта функция имеет оценку

$$\left|Y_1(N_{e,r})\right|<c\exp\left(-\frac{\eta^2_{e,r}}{8\tau}\right).$$ Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $H_2(N_{e,r})\in U_1$. Тогда задача

$$\partial_\tau Y_2=\Delta_\eta Y_2+H_2(N_{e,r}),\quad Y_2\big|_{t=\tau=0}=0,\quad Y_2\big|_{\eta_{1,1}=0}=-Y(N_{2,e}),\qquad e=1,2$$

$$Y_2\big|_{\eta_{2,1}=0}=-Y_1(N_{1,e}),\quad Y_2\big|_{\eta_{2,2}=0}=-Y_1(N_{1,e}),\quad Y_2\big|_{\eta_{1,2}=0}=-Y_1(N_{2,e}), \tag{9}$$

однозначна разрешима в U_1 и для решения справедлива оценка

$$\left|Y_2\left(N_{1,r},N_{2,e}\right)\right|<c\exp\left(-\frac{\eta^2_{1,r}+\eta^2_{2,e}}{8\sqrt{\tau}}\right),\qquad r,e=1,2 \tag{10}$$

Доказательство. Задача расщепляется на следующие задачи

$$\partial_\tau Y_2=\partial^2_{\eta_{11}}Y_2+\partial^2_{\eta_{21}}Y_2+H^1_2(\eta_{11},\eta_{21}),\ \ Y_2\big|_{\eta_{11}=0}=-Y_1(N_{21}),\ \ Y_2\big|_{\eta_{21}=0}=-Y_1(N_{11}),$$

$$\partial_\tau Y_2=\partial^2_{\eta_{11}}Y_2+\partial^2_{\eta_{22}}Y_2+H^2_2(\eta_{11},\eta_{22}),\ \ Y_2\big|_{\eta_{11}=0}=-Y_1(N_{22}),\ \ Y_2\big|_{\eta_{22}=0}=-Y_1(N_{11}),$$

$$\partial_\tau Y_2=\partial^2_{\eta_{12}}Y_2+\partial^2_{\eta_{21}}Y_2+H^3_2(\eta_{12},\eta_{21}),\ \ Y_2\big|_{\eta_{12}=0}=-Y_1(N_{21}),\ \ Y_2\big|_{\eta_{21}=0}=-Y_1(N_{12}),$$

$$\partial_\tau Y_2=\partial^2_{\eta_{22}}Y_2+\partial^2_{\eta_{22}}Y_2+H^4_2(\eta_{12},\eta_{22}),\ \ Y_2\big|_{\eta_{12}=0}=-Y_1(N_{22}),\ \ Y_2\big|_{\eta_{22}=0}=-Y_1(N_{12}) \tag{11}$$

На основании леммы из [2], каждая из этих задач однозначна разрешима и решение удовлетворяет оценке (10). *Лемма доказана.*

Функция $u_k(M)\in U$ представима в

$$u_k(M)=\upsilon_k(x,t)+\sum_{e,r=1}^{2}Y_1^k(N_{e,r})+\sum_{e,r=1}^{2}Y_2^k(N_{1,e},N_{2,r})+$$

виде

$$+\left\{c^k(x,t)+\sum_{e,r=1}^{2}\left[\omega_k^{e,r}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_{er}}{2\sqrt{z}}\right)+Z_k^{e,r}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_{1e}}{2\sqrt{z}}\right)erfc\left(\frac{\xi_{2r}}{2\sqrt{z}}\right)\right]\exp(\mu)\right\} \tag{12}$$

На основании оценки (10) замечаем, что функции $Y_2^k(N_{11},N_{21})$, $Y_2^k(N_{12},N_{22})$,

$$erfc\left(\frac{\xi_{11}}{2\sqrt{t}}\right)\cdot erfc\left(\frac{\xi_{21}}{2\sqrt{t}}\right),\qquad erfc\left(\frac{\xi_{12}}{2\sqrt{t}}\right)\cdot erfc\left(\frac{\xi_{22}}{2\sqrt{t}}\right),$$

описывают многомерный пограничный слой, а функции $Y_2^k(N_{11},N_{22})$, $Y_2^k(N_{12},N_{21})$,

$$erfc\left(\frac{\xi_{11}}{2\sqrt{t}}\right)\cdot erfc\left(\frac{\xi_{22}}{2\sqrt{t}}\right),\qquad erfc\left(\frac{\xi_{12}}{2\sqrt{t}}\right)\cdot erfc\left(\frac{\xi_{21}}{2\sqrt{t}}\right),$$

описывают угловой пограничный слой. Пренебрегая членами $\left(\exp\left(-\frac{\varphi_{er}(e-1)}{8\varepsilon\tau}\right)\right)$,

$\left(\exp\left(-\frac{1}{8\sqrt{\varepsilon^3}\tau}\right)\right)$, удовлетворяя функцию (12) краевым условиям из (7), получим

$$Y_1^k(N_{e,r})\Big|_{t=\tau=0}=0,\qquad Y_2^k(N_{2,e}^{1,r})\Big|_{t=\tau=0}=0,\qquad c^k(x,t)\Big|_{t=0}=-\upsilon_k(x,0)+\eta(x),$$

$$\omega_k^{e,r}(x,t)\Big|_{t=0}=\widetilde{\omega}_k^{e,r}(x),\quad Z_k^{e,r}(x,t)\Big|_{t=0}=\widetilde{Z}_k^{e,r}(x),\quad Y_1^k(N_{e,r})\Big|_{\eta_{er}=0}=d_k^{e,r}(x,t)\Big|_{x_e=r-1},$$

$$Y_2^k(N_{1,e},N_{2,e})\Big|_{\eta_{1,e}=0}=-Y_1^k(N_{2,e}),\qquad Y_2^k(N_{1,e},N_{2,e})\Big|_{\eta_{1,e}=0}=-Y_1^k(N_{1,e}),\quad e=1,2$$

$$\omega_k^{e,r}(x,t)\Big|_{x_e=r-1}=-c^k(x,t)\Big|_{x_e=r-1},\quad Z_k^{e,r}(x,t)\Big|_{x_e=r-1}=-\omega_k^{e,r}(x,t)\Big|_{x_e=r-1},\quad e,r=1,2. \tag{13}$$

Вычислим

$$T_1u_k(M)=-b(t)\left[\upsilon_k(x,t)+\sum_{e,r=1}^{2}Y_1^k(N_{e,r})+\sum_{e,r=1}^{2}Y_2^k(N_{2,e}^{1,r})\right]$$

$$\partial_t u_k=\partial_t\upsilon_k+\sum_{e,r=1}^{2}\left[\partial_t Y_1^k(N_{e,r})+\partial_t Y_2^k(N_{1,e},N_{2,r})\right]+$$

$$+\left\{\partial_t c^k(x,t)+\sum_{e,r=1}^{2}\left[\partial_t\omega_k^{e,r}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_{er}}{2\sqrt{z}}\right)+\partial_t Z_k^{e,r}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_{1e}}{2\sqrt{z}}\right)erfc\left(\frac{\xi_{2r}}{2\sqrt{z}}\right)\right]\exp(\mu)\right\} \tag{14}$$

Теорема. Пусть заданные функции гладкие по своим аргументам, $\forall t\in[0,T]$ функция $b(t)<0$ и $H(M)\in U$. Тогда уравнение

$$T_0U_k(M)=H(M) \tag{15}$$

имеет единственное решение в U, удовлетворяющее условию

1) $U_k(M)\big|_{t=\tau=\mu=Z=0}=h(x)$, $U_k(M)\big|_{\partial Q}=0$,

2) $L_{\eta,x}U_k(M)=0$, $L_{\xi,x}U_k(M)=0$,

3) $T_1U_k(M)-\partial_t U_{k-2}(M)\in U_0\oplus U_1$.

Доказательство. Подставим функцию (12) в уравнение (15), тогда относительно $Y_1^k(N_{e,r})$ и $Y_2^k(N_{1,e},N_{2,r})$ получим уравнения (8) и (9) соответственно. Удовлетворяя функцию (12), условие 1 для функций $Y_1^k(N_{e,r})$ и $Y_2^k(N_{1,e},N_{2,r})$ определим краевые условия из (8) и (9), а для функций $\omega_k^{e,r}(x,t)$, $Z_k^{e,r}(x,t)$, $c^k(x,t)$ условия (13). Этим обеспечивается условие 1). Обеспечивая условие $\partial_t U_k(M) \in U$ получим следующие уравнения

$$b(t)\upsilon_k(x,t)+\partial_t\upsilon_{k-1}(x,t)=0, \quad \partial_t c^k(x,t)=0, \quad \partial_t\omega_k^{e,r}=0, \quad \partial_t Z_k^{e,r}(x,t)=0,$$

$$\partial_t Y_1^k(N_{e,r})=0, \quad \partial_t Y_2^k(N_{1,e},N_{2,r})=0.$$

Из первого уравнения определим $\upsilon_k(x,t)$, второе уравнение решается при начальном условии

$$c^k(x,t)\big|_{t=0}=-\upsilon_k(x,0)+h(x),$$

а остальные уравнения решаются при начальных условиях из (13):

$$\omega_k^{e,r}(x,t)=\tilde{\omega}_k^{e,r}(x), \quad Z_k^{e,r}(x,t)=\tilde{Z}_k^{e,r}(x),$$

где $\tilde{\omega}_k^{e,r}(x)$, и $\tilde{Z}_k^{e,r}(x)$ произвольные функции обеспечат выполнению условия $L_{\xi,x}U_k(M)=0$. Это условие приводит к дифференциальному уравнению относительно этих функций и решаемые при начальном условии

$$\tilde{\omega}_k^{e,r}(x)\big|_{x_e=r-1}=-c^k(x,t)\big|_{x_e=r-1}, \quad \tilde{Z}_k^{e,r}(x)\big|_{x_e=r-1}=-\omega_k^{e,r}(x)\big|_{x_e=r-1}, \quad e,r=1,2.$$

Условие $L_{\eta,x}U_k(M)=0$ обеспечится, подобно вышеописанному, выбором произвольной функции $d_k^{e,r}(x)\big|_{t=0}=\tilde{d}_k^{e,r}(x).$

Таким образом, однозначно определено решение уравнения (15). Используя теорему, последовательно определим коэффициенты частичной суммы ряда (6).

$$U_{\varepsilon_n}(M)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^k U_k(M) \tag{16}$$

Аналогично [2], на основании принципа максимума, устанавливается асимптотический характер частичной суммы (16), посредством сужение регуляризующими функциями.

Литература:

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. Москва. 1981, 398с.
2. Омуралиев А.С. Регуляризация двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2007, Е.47, №10, с.1746-1751.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Чекеев А.