Чекеев А.А., Абдраимова М.А., Баатырбеков Э.Б.

ТОПОЛОГИЯНЫН БИР КАЛЫПТУУ КАСИЕТИНИН МАКСИМАЛДУУ БОРБОРЛОШТУРУЛГАН СИСТЕМАЛАРЫ

Чекеев А.А., Абдраимова М.А., Баатырбеков Э.Б.

МАКСИМАЛЬНЫЕ ЦЕНТРИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ СО СВОЙСТВОМ РАВНОМЕРНОЙ ТОПОЛОГИИ

A.A. Chekeev, M.A. Abdraimova, E.B. Baatyrbekov

MAXIMAL CENTERED SYSTEMS WITH THE UNIFORM SEPARABILITY PROPERTY

УДК: 515.12

Бул иште бир калыптуу мейкиндикте П.С. Александровдун [1] толук регулярдуу ультрафильтрлердин бир калыптуу аналогу - $u-$ультрафильтрлер тургузулду. Бир калыптуу мейкиндикте $u-$функциянын жардамы менен $u-$ажыратуусу, $u-$камтылган көптүгү жана $u-$системасы аныкталган. Бардык $u-$борборлоштурулган системасы $u-$фильтр болуп эсептелинет. Куратовский-Цорундун максималдуулук принцибинин негизинде: бардык $u-$борборлоштурулган системасы максималдуу $u-$борборлоштурулган системасына камтылат, ал эми бардык максималдуу $u-$борборлоштурулган системасы $u-$ультрафильтр деп аталат. $u-$ультрафильтрлердин негизги касиеттери тургузулган, атап айтканда, $u-$ачык көптүгүнүн биригүүлөрүнүн чектүү системасы $u-$ультрафильтрде жатышы далилденсе, анда бул системанын жок дегенде бир элементи ушул $u-$ультрафильтрде жатаары анык.

Негизги сөздөр: *$u-$ачык, $u-$туюк көптүктөр, $u-$фильтрлер, $u-$ультрафильтрлер.*

В работе на равномерном пространстве построен равномерный аналог вполне регулярных ультрафильтров П.С. Александрова [1] - $u-$ультрафильтры. Посредством $u-$функции на равномерном пространстве определены $u-$отделенные, $u-$вложенные подмножества, а так же $u-$системы. Всякая $u-$центрированная система является $u-$фильтром. На основании принципа максимальности Куратовского-Цорна: всякая $u-$центрированная система содержится в максимальной $u-$центрированной системе, а всякая максимальная $u-$центрированная система называется $u-$ультрафильтром. Установлены основные свойства $u-$ультрафильтров, в частности, доказано,что если объединение конечной системы $u-$открытых множеств принадлежит $u-$ультрафильтру, то существует хотя бы один элемент этой системы, принадлежащий этому $u-$ультрафильтру.

Ключевые слова: *$u-$открытые, $u-$замкнутые множества, $u-$фильтры, $u-$ультрафильтры.*

In paper on a uniform space the uniform analogue of completely regular ultrafilteres are constructed by P.S. Alexandroff [1] - $u-$ultrafilteres. By means of $u-$function on a uniform space $u-$separable, $u-$embedded subsets and $u-$system are determined. Any $u-$centered system is $u-$filter. On the basis of the Kuratowski - Zorn maximum principle: every $u-$centered system is contained in a maximal $u-$centered system, and any maximal $u-$centered system is called an $u-$ultrafilter. The basic properties of $u-$ultrafilteres are established, in particular, it is proved that if the union of a finite system of $u-$open sets belongs to the $u-$ultrafilter, then, there is at least one element of that system belonging to the $u-$ultrafilter.

Key words: *$u-$open, $u-$closed sets, $u-$filter, $u-$ultrafilteres.*

Обозначения использованы из книги Дж. Исбелла [5]. Необходимые факты теории равномерных пространств взяты из книги А.А. Борубаева [3], а для топологических пространств - из книги Р.Энгелькинга [10] и А.В.Архангельского и В.И.Пономарёва [2].

Для равномерного пространства uX через $U(uX)$ $(U^*(uX))$ обозначено множество всех (ограниченных) равномерно непрерывных функций на uX. $\mathcal{Z}_u=\{f^{-1}(0):f\in U(uX)\}$ множество нуль – множеств всех равномерно непрерывных функций из $U(uX)$, а $C\mathcal{Z}_u=\{X\setminus Z:Z\in\mathcal{Z}_u\}$ - множество всех конуль – множеств. Множества из $\mathcal{Z}_u$ называют $u-$*замкнутыми*, а множества из $C\mathcal{Z}_u$ называют $u-$*открытыми* [8, 9]. Множество $\mathcal{Z}_u$ $(C\mathcal{Z}_u)$ замкнуто относительно конечных (счётных) объединений и счётных (конечных) пересечений [8, 9].

Традиционно □ обозначает множество действительных чисел, $I=[0,1]$ - единичный отрезок, □ и I наделены естественными равномерностями. Знак □ означает завершение доказательства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [8, 9]. Отображение $f:uX\to I$ называют $u-$*функцией*, если $f^{-1}(U)\in C\mathcal{Z}_u$ $(f^{-1}(F)\in\mathcal{Z}_u)$ для любого открытого $U\subset I$ (замкнуто $F\subset I$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подмножества A,B равномерного пространства uX называются *равномерно отделёнными*, если существует такое $\alpha\in u$, что $A\cap\alpha(B)=\varnothing$, где $\alpha(B)=\cup\{U\in\alpha:U\cap B\neq 0\}$ - звезда множества B относительно покрытия α.

ТЕОРЕМА 3 [4, 6, 7]. *Пусть подмножества A и B равномерного пространства uX равномерно отделены. Тогда существует такая равномерно непрерывная функция $f : uX \to I$, что* $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$.

ТЕОРЕМА 4 [8, 9]. *Пусть uX - равномерное пространство, $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_u$ такие $u-$замкнутые множества, что $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$. Тогда существует такая $u-$функция $f : uX \to I$, что $f(Z_1) = \{0\}$,* $f(Z_2) = \{1\}$.

Ниже построен равномерный аналог вполне регулярных концов П.С. Александрова [1] - $u-$ультрафильтры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Подмножества $A, B \subseteq X$ равномерного пространства uX называется $u-$*отделенными*, если существует такая $u-$функция $f : uX \to I = [0,1]$, что $f(A) = 0$ и $f(B) = 1$. Если A $u-$отделено от $X \setminus B$, тогда B называется $u-$*окрестностью* A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $A, B \subseteq X$ - подмножества. Множество A называется $u-$*вложенным* в множество B, если A $u-$отделено от $X \setminus B$, т.е. существует такая $u-$функция $f : uX \to I$, что $f(A) = 0$ и $f(X \setminus B) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Семейство ξ подмножеств равномерного пространства uX называется $u-$*системой,* если для любого $K \in \xi$ существует $B \in \xi$ такое, что B $u-$вложено в K, другими словами, каждое $K \in \xi$ является $u-$окрестностью некоторого $B \in \xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Центрированная система множеств, являющаяся $u-$системой, называется $u-$*центрированной* системой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Предфильтр (фильтр), который является $u-$системой, называется $u-$*предфильтром (фильтром).*

ТЕОРЕМА 10. *Пусть η - $u-$центрированная система и θ - семейство всевозможных конечных пересечений элементов η. Тогда θ - $u-$центрированная система.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению θ - центрированная система. Покажем, что θ является $u-$системой.

Пусть $U_1, U_2, ..., U_n$ - элементы η, тогда $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ элемент θ, т.е. $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \theta$. Для каждого $U_i \in \eta$, $i = 1,2,...,n$ найдется $V_i \in \eta$, $i = 1,2,...,n$ такое, что V_i $u-$вложено в U_i для каждого $i = 1,2,...,n$, поэтому существуют такие $u-$функции $f_i : uX \to I$, что выполнены равенства $f_i(V_i) = \{0\}$, $f_i(X \setminus U_i) = \{1\}$, $i = 1,2,...,n$. Тогда имеем $Z_{i1}^0 = f_i^{-1}(0) \supset V_i$, $Z_{i2}^1 = f_i^{-1}(1) \supset X \setminus U_i$, для любого $i = 1, 2, ..., n$, $Z_{i1}^0 \cap Z_{i2}^1 = \varnothing$ и $Z_{i1}^0 \in \mathcal{Z}_u$, $Z_{i2}^1 \in \mathcal{Z}_u, i = 1, 2, ..., n$. Следовательно, существуют такие $u-$функции g_{i1}, g_{i2}, что $g_{i1}^{-1}(0) = Z_{i2}^0$, $g_{i2}^{-1}(0) = Z_{i2}^1$, $i = 1,2,...,n$, $g_{i1}^{-1}(0) = Z_{i1}^0$, $g_{i2}^{-1}(0) = Z_{i2}^1$, $i = 1,2,...,n$. Так как $Z_{i1}^0 \cap Z_{i2}^1 = \varnothing$, $i = 1,2,...,n$, тогда $(\bigcap_{i=1}^{n} Z_{i1}^0) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} Z_{i2}^1) = \varnothing$. Тогда, имеем для функции $g = g_{1z} + g_{2z} + ... + g_{n1}$, $g^{-1}(0) = (g_{1z} + g_{2z} + ... + g_{n1})^{-1}(0) = \bigcap_{i-1}^{n} Z_{i1}^0$ и для функции $f = g_{1z} \cdot g_{2z} \cdot ... \cdot g_{nz}$, $f^{-1}(0) = (g_{1z} \cdot g_{2z} \cdot ... \cdot g_{nz})^{-1}(0) = \bigcup_{i-1}^{n} Z_{iz}^1$ и, следовательно, $\bigcap_{i=1}^{n} Z_{i1}^0 \in \mathcal{Z}_u$, $\bigcup_{i=1}^{n} Z_{i2}^1 \in \mathcal{Z}_u$. Тогда существует такая $u-$функция $F : uX \to I$, что $F(\bigcap_{i=1}^{n} Z_{i1}^0) = \{0\}$ и $F(\bigcup_{i=1}^{n} Z_{i2}^1) = \{1\}$. Далее, имеем, $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} Z_{i1}^0$ и $\bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} Z_{i2}^1$, следовательно, выполнены равенства $F(\bigcap_{i=1}^{n} V_i) = \{0\}$, $F(\bigcup_{i=1}^{n} X \setminus U_i) = \{1\}$. Ясно, что $F(\bigcup_{i=1}^{n} X \setminus U_i) = F(X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i) = \{0\}$, следовательно, $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ $u-$вложено в $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Это доказывает то, что семейство θ является $u-$системой. Итак, семейство θ - $u-$центрированное семейство.

СЛЕДСТВИЕ 11. *Если* η *-* $u-$*центрированная система и* θ *- семейство всевозможных конечных пересечений из* η*, тогда* $\xi=\eta\cup\theta$ *является* $u-$*предфильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что для любых $U\in\eta$ и $V\in\theta$ всегда $U\cap V\neq\varnothing$, а так как η и θ являются $u-$центрированными системами найдутся $U'\in\eta$ и $V'\in\theta$ такие, что U' $u-$вложено в U, U' $u-$вложено в V. Тогда, как и в доказательстве теоремы 10, нетрудно показать, что $U'\cap V'$ $u-$вложено в $U\cap V$. Итак, семейство ξ является $u-$системой. Пусть U_1, U_2 из ξ произвольны. Тогда найдутся V_1, V_2 $u-$вложенные в U_1 и U_2 из ξ, соответственно. Ясно, что $U_3=V_1\cap V_2$ $u-$вложено в $U_1\cap U_2$ и $U_3\in\xi$ т.е. $U_3\subset U_1\cap U_2$. Итак, семейство ξ - $u-$предфильтр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Фильтр, порожденный* $u-$*предфильтром, является* $u-$*фильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть η - $u-$предфильтр и $\xi=\{K\subset X$: для K *существует* $\mathrm{N}\in\eta$ и $\mathrm{N}\subset\mathrm{K}\}$. Ясно, что ξ - фильтр. Покажем, что ξ - $u-$семейство. Пусть $K\in\xi$ произвольно $N\in\eta$ такое, что $N\subset K$. Семейство η - $u-$предфильтр, поэтому найдется такое $U\in\eta$, что U $u-$вложено в K, т.е. существует $u-$функция $f:uX\to I$ такая, что $f(U)=\{0\}$, $f(X\setminus N)=\{1\}$. Следовательно, $f(X\setminus K)=1$, т.к. $X\setminus K\subset X\setminus N$. Итак, $f(U)=0$, $f(X\setminus K)=1$, т.е. U $u-$вложено в K и K является $u-$окрестностью U. Это означает, что фильтр ξ является $u-$системой. Итак, ξ - $u-$фильтр. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Всякая $u-$центрированная система, не являющаяся подсистемой никакой отличной от нее $u-$центрированной системы, называется *максимальной* $u-$*центрированной системой.*

ТЕОРЕМА 14. *Всякая максимальная* $u-$*центрированная система является* $u-$*фильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть η - максимальная $u-$центрированная система и θ – всевозможные конечные пересечения элементов η. Тогда в силу теоремы 10 и максимальности η следует, что $\eta=\theta$. А в силу следствия 11 следует, что $\xi=\eta\cup\theta=\eta$ является $u-$предфильтром. Теперь из предложения 12 и максимальности η следует, что η - $u-$фильтр. □

Эта теорема дает нам право дать другое, эквивалентное, определение максимальной $u-$центрированной системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Максимальная $u-$центрированная система называется $u-$*ультрафильтром.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. *Если* ξ *-* $u-$*ультрафильтр и открытое множество* U *является* $u-$*окрестностью некоторого элемента из* ξ*, тогда* $U\in\xi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть открытое множество U является $u-$окрестностью некоторого элемента $u-$ультрафильтра ξ. Тогда $U\cap K\neq\varnothing$ для любого $K\in\xi$. Семейство $\xi'=\xi\cup\{U\}$ является $u-$центрированной системой, но ξ - $u-$ультрафильтр, следовательно $\xi'=\xi$. Отсюда следует, что $U\in\xi$. □

Из принципа максимальности Куратовского – Цорна [2], [10], следует

ТЕОРЕМА 17. *Всякая* $u-$*центрированная система содержится, по крайней мере, в одном* $u-$*ультрафильтре.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $O(\mathfrak{S})$ - множество всех $u-$центрированных систем на множестве $\mathscr{S}$ всех открытых множеств равномерного пространства uX.

Упорядочим $O(\mathfrak{S})$ следующим образом:

если $\xi_1\in O(\mathfrak{S})$ и $\xi_2\in O(\mathfrak{S})$, то $\xi_1<\xi_2$ тогда и только тогда, когда $\xi_1\subset\xi_2$, т.е. ξ_1 содержится в ξ_2 как множество.

Покажем, что упорядоченное множество $(O(\mathfrak{S}),<)$ индуктивно, т.е. что для любой цепи $\mathcal{C}\subset O(\mathfrak{S}),<)$ существует $\tilde{\xi}\in O(\mathfrak{S})$, являющееся мажорантой для $\mathcal{C}$. Тогда из принципа максимальности Куратовского – Цорна [2], [10], будет следовать существование в $(O(\mathfrak{S}),<)$ максимального элемента ξ^*.

Любая $u-$центрированная система $\xi \in \mathcal{C}$ является некоторым подмножеством $\mathcal{E}$ всех открытых множеств на uX. Положим $\tilde{\xi} = \cup\{\xi : \xi \in \mathcal{C}\}$. Проверим, что $\tilde{\xi}$ - $u-$центрированная система. Пусть $U_1, U_2, ..., U_k$ - произвольный конечный набор из $\tilde{\xi}$. По определению семейства $\tilde{\xi}$ существуют такие $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k \in \mathcal{C}$ что $U_i \in \xi_i, i = 1,2,...,k$. Так как $\mathcal{C}$ - цепь в упорядоченном множестве $(O(\mathcal{E}), <)$, то существует перестановка $i_1, i_2, ..., i_k$ чисел $1,2,...,k$ такая, что $\xi_{i1} < \xi_{i2} < ... < \xi_{ik}$. Тогда $\xi_{i1} \subset \xi_{i2} \subset ... \subset \xi_{ik}$. Итак, $U_i \in \xi_{ik}$ для всех $i_1, i_2, ..., i_k$. Поскольку ξ_{ik} - $u-$центрированная система, то $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \neq \varnothing$. Пусть теперь $U \in \tilde{\xi}$ - произвольный элемент. Тогда существует индекс j такой, что $1 \leq j \leq k$ и $U \in \xi_j$. Поскольку ξ_j - $u-$центрированная система, что существует $V \in \xi_j \subset \tilde{\xi}$ $u-$вложенное в U. Итак, $\tilde{\xi}$ - $u-$центрированная система. Из определения $\tilde{\xi}$ следует, что $\xi \subset \tilde{\xi}$ для любого $\xi \in \mathcal{C}$ и $\tilde{\xi} \in O(\mathcal{E})$. Последнее означает, что $\xi < \tilde{\xi}$ для любого $\xi \in \mathcal{C}$. Таким образом, $\tilde{\xi}$ - мажоранта цепи $\mathcal{C} \subset (O(\mathcal{E}), <)$. На основании принципа Куратовского – Цорна мы заключаем, что в упорядоченном множестве $(O(\mathcal{E}), <)$ существует максимальный элемент ξ^*. Покажем, что ξ^* является $u-$ультрафильтром, т.е. максимальная $u-$центрированная система. Пусть $U \in \mathcal{E} \setminus \xi^*$. Положим $\xi' = \xi^* \cup \{U\}$. Если ξ' - $u-$центрированная система, то U является $u-$окрестностью некоторого элемента из ξ^*, следовательно, по предложению 16, $U \in \xi^*$, но $U \notin \xi^*$. Тогда семейство ξ' не $u-$центрировано, т.е. $\xi' \notin O(\mathcal{E})$ и ξ^* является $u-$ ультрафильтром. □

ТЕОРЕМА 18. *Семейство ξ_x всех открытых окрестностей точки $x \in X$ равномерного пространства uX является $u-$ультрафильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для любой открытой окрестности O_x точки $x \in X$ найдется такая окрестность U_x этой же точки, что U_x $u-$отделена от $X \setminus O_x$. В силу тихоновости равномерного пространства uX, существует такая равномерно непрерывная функция $f : uX \to I$, что $f(x) = 0$ и $f(X \setminus O_x) = 1$ [5]. В силу равномерной непрерывности функции f, она является $u-$функцией [8, 9] и для множеств $U_x = f^{-1}([0;1/3])$ и $U_{X \setminus O_x} = f^{-1}((2/3;1])$ имеем $\bar{U}_x = f^{-1}([0;1/3])$ и $\bar{U}_{X \setminus O_x} = f^{-1}([2/3;1])$ и, следовательно, $\bar{U}_x \cap \bar{U}_{X \setminus O_x} = \varnothing$. Тогда $\bar{U}_x \in \mathcal{Z}_u$ и $\bar{U}_{X \setminus O_x} \in \mathcal{Z}_u$, следовательно, существует $u-$функция $g : uX \to I$ такая, что $g(\bar{U}_x) = 0$; $g(\bar{U}_{X \setminus O_x}) = 1$. Но $X \setminus O_x \subseteq U_{X \setminus O_x} \subseteq \bar{U}_{X \setminus O_x}$, следовательно $g(X \setminus O_x) = 1$. Итак, мы имеем, $g(U_x) \subseteq g(\bar{U}_x) = 0$ и $g(X \setminus O_x) = 1$, следовательно, U_x- открытая окрестность точки $x, u-$вложенная в открытую окрестность O_x. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. *Семейство ξ_Z всех $u-$окрестностей множества $Z \in \mathcal{Z}_u$ в равномерном пространстве uX является $u-$системой на uX.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U \in \xi_Z$, т.е. U является произвольной $u-$окрестностью множества $Z \in \mathcal{Z}_u$. Пусть $f : uX \to I$ - такая $u-$функция, что $f(Z) = 0$, и $f(X \setminus U) = 1$. Положим $U_1 = f^{-1}([0;1/3))$ и $U_2 = f^{-1}((2/3;1])$. Тогда $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, $Z \subset U_1$, $X \setminus U \subset U_2$. Так как, $U_1 \in C\mathcal{Z}_u$, то $X \setminus U_1 \in \mathcal{Z}_u$ и $Z \cap X \setminus U_1 = \varnothing$. Следовательно, существует такая $u-$функция $g : uX \to I$, что $g(Z) = 0$ и $g(X \setminus U_1) = 1$. Это означает, что U_1 является $u-$окрестностью для Z. Всякая $u-$функция является непрерывной, следовательно, для $u-$функции f имеем $\bar{U}_1 = f^{-1}([0;1/3])$ и $\bar{U}_2 = f^{-1}([2/3;1])$. Ясно, что $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$ равномерно замкнуты, т.е. $\bar{U}_1, \bar{U}_2 \in \mathcal{Z}_u$ и

$\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \varnothing$. Имеем следующее включение $X \setminus U \subset U_2 \subset \bar{U}_2 \subset X \setminus \bar{U}_1 \subset X \setminus U_1 \subset X \setminus Z$. По теореме 4 существует такая $u-$функция $\varphi : uX \to I$, что $\varphi(\bar{U}_2) = 1$ и $\varphi(\bar{U}_1) = 0$. Тогда тем более $\varphi(X \setminus U) = 1$ и $\varphi(U_1) = 0$, следовательно, U является $u-$окрестностью U_1. Это доказывает то, что ζ_Z является $u-$системой. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. *Пусть $Z \in \mathcal{Z}_u$ и $Z \neq \varnothing$. Тогда множество ξ_Z всех $u-$окрестностей множества Z не пусто, т.е. $\xi_Z \neq \varnothing$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно такая функция $f : uX \to I$, что $f(x) = 0$ для всех $x \in X$ равномерно непрерывна, и, следовательно, является $u-$функцией и $f(Z) = 0$, где $Z \in \mathcal{Z}_u$ и $f(X \setminus X) = f(\varnothing) = 1$, т.е. множество Z $u-$вложено в X, т.е. $X \in \xi_Z$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. *Пусть ξ - является $u-$ультрафильтром на равномерном пространстве uX и $Z \in \mathcal{Z}_u$ - некоторое $u-$замкнутое множество. Если $Z \cap K \neq \varnothing$ для любого $K \in \xi$, тогда $\xi_z \subset \xi$, где ξ_z - семейство всех $u-$окрестностей множества $Z \in \mathcal{Z}_u$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 20 вытекает, что семейство ξ_z всех $u-$окрестностей множества $Z \in \mathcal{Z}_u$ не пусто, т.е. $\xi_z \neq \varnothing$. Тогда $\xi_z \cup \xi$ - $u-$центрированная система открытых множеств, но ξ - $u-$ультрафильтр, следовательно $\xi_z \cup \xi = \xi$, т.е. $\xi_z \subset \xi$. □

ТЕОРЕМА 22. *Пусть ξ - $u-$ультрафильтр, $A, B \in C\mathcal{Z}_u$ и $A \cup B \in \xi$, тогда, либо $A \in \xi$, либо $B \in \xi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сразу предположим, что $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$, т.к. не может быть одновременно $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$. Тогда $A \cup B = \varnothing \notin \xi$. Также, если $A = \varnothing$ и $B \neq \varnothing$, то $A \cup B = B \in \xi$ и доказывать нечего. Аналогично, когда $A \neq \varnothing$, $B = \varnothing$.

Итак, пусть $A, B \in C\mathcal{Z}_u$ и $A \cup B \in \xi$. Тогда $A \cup B$ является $u-$окрестностью некоторого $K \in \xi$, существует, т.к. $u-$функция такая, что $f(K) = 0$ и $f(X \setminus (A \cup B)) = 1$. Тогда $Z_K = f^{-1}(0) \in \mathcal{Z}_u$ и $K \subset Z_K$ и $X \setminus (A \cap B) = X \setminus A \cup X \setminus B \subseteq f^{-1}(1)$ и $f^{-1}(0) \cap f^{-1}(1) = \varnothing$. Тогда $X \setminus A \cap Z_K = \varnothing$ и $X \setminus B \cap Z_K = \varnothing$, но по условию $X \setminus A \in \mathcal{Z}_u$ и $X \setminus B \in \mathcal{Z}_u$, следовательно существуют такие $u-$функции $g_i : uX \to I,\ i = 1,2$, что $g_1(Z_K) = 0;\ g_1(X \setminus A) = 1$ и $g_2(Z_K) = 0$, и $g_2(X \setminus B) = 1$. Так как $K \subset Z_K$, то тем более $g_1(K) = g_2(K) = 0$. Это означает, что A и B является $u-$окрестностями K. Тогда из предложения 16, следует, что $A \in \xi$ и $B \in \xi$. □

СЛЕДСТВИЕ 23. *Пусть ξ - $u-$ультрафильтр и $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \xi$, где $A_i \in C\mathcal{Z}_u$ для любого $i = 1,2,\ldots,n$. Тогда существует такой j, $1 \leq j \leq n$, что $A_j \in \xi$.*

Список литературы:

1. *Александров П.С.* О бикомпактных расширениях топологических пространств [Текст] / П.С.Александров // Математический сборник.- 1939.- Т.5(47), №2. С. 403-423.
2. *Архангельский А.В.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях [Текст] /А.В.Архангельский, В.И.Пономарев. – М.: Наука, 1974.- 423 с.
3. *Борубаев, А.А.* Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения [Текст] /А.А.Борубаев. – Фрунзе: Илим, 1990.- 171 с.
4. *Ефремович В.А.* Геометрия близости I [Текст] /В.А.Ефремович // Математический сборник.- 1952.- Т.31, №1.- С.189-200.
5. *Isbell J.R.* Uniform spaces: Mathematical Survey [Text] /J.R.Isbell. - Providence, 1964.- 175 p.
6. *Isiwata T.* Structures of Uniform spaces X and $C(X)$ [Text] /T.Isiwata // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daidaku. A(5).- 1955.- Vol. 134. P. 174-184.
7. *Смирнов Ю.М.* О пространствах близости [Текст] /Ю.М.Смирнов //Матем. сб.- 1952.- Т.31, №3. С. 543-574.
8. *Charalambous, M.G.* A new covering dimension function for uniform spaces [Text] /M.G.Charalambous // J. London Math, Soc.- 1975.-Vol.11, №2. P. 137-143.
9. *Charalambous M.G.* Further theory and application of covering dimension of uniform spaces [Text] /M.G.Charalambous // Czech. Math. J.- 1991.- Vol. 41, №116. P. 378-394.
10. *Энгелькинг Р.* Общая топология [Текст] / Р.Энгелькинг. - М.: Мир, 1986.- 744 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Касымова Т.Дж.