Чекеев А.А., Абдраимова М.А., Баатырбеков Э.Б.

КОНУЛ ПСЕВДОКОМПАКТУУ МЕЙКИНДИКТЕР

Чекеев А.А., Абдраимова М.А., Баатырбеков Э.Б.

КОНУЛЬ ПСЕВДОКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

A.A. Chekeev, M.A. Abdraimova, E.B. Baatyrbekov

COZERO PSEUDOCOMPACT SPACES

УДК: 515.12

Бул иште предкомпактуу бир калыптуу мейкиндиктердин камтылган классы болуп эсептелинген $coz-$псевдокомпактуу бир калыптуу мейкиндик түшүнүгү киргизилген. Псевдокомпактуу топологиялык мейкиндиктин аналогу болуп $coz-$псевдокомпактуу бир калыптуу мейкиндиги эсептелинет. Чектүү локалдуу $u-$ачык жабдуусунун, $u-$ачык саналуучу кемичүү көптүктөр системасынын жардамы менен $coz-$псевдокомпактуу бир калыптуу мейкиндигинин мүнөздөмөсү далилденди. $Coz-$псевдокомпактуулуктун касиетине тең күчтүү болгон, табылган мейкиндикте Волмэн предкомпактуу бир калыптуулугу $coz-$ичке бир калыптуулугу менен дал келээри далилденген. $Coz-$псевдокомпактуу бир калыптуу мейкиндиктердин $\beta-$сымал компактификациясы жана Волмэн реалкомпактификациясы дал келээри көрсөтүлгөн.

Негизги сөздөр: *$u-$ачык, $u-$туюк көптүк, $u-$үзгүлтүксүз функция, $u-$псевдокомпактуулук.*

В работе введены $coz-$псевдокомпактные равномерные пространства, являющиеся подклассом предкомпактных равномерных пространств. $Coz-$псевдокомпактные равномерные пространства являются аналогом псевдокомпактных топологических пространств. Доказаны характеристики $coz-$псевдокомпактных равномерных пространств посредством локально конечных $u-$открытых покрытий, счетных убывающих семейств $u-$открытых множеств. Доказано, что свойство $coz-$псевдокомпактности равносильно тому, что у исходного пространства Волмэновская предкомпактная равномерность совпадает с $coz-$тонкой равномерностью, следовательно, само исходное равномерное пространство является предкомпактным. Показано, что у $coz-$псевдокомпактного равномерного пространства $\beta-$подобная компактификация и Волмэновская реалкомпактификация совпадают.

Ключевые слова: *$u-$открытые, $u-$замкнутые множества, $u-$непрерывная функция, $coz-$псевдокомпактность.*

In this paper the $coz-$pseudocompactuniform spaces are introduced, which are a subclass of precompact uniform spaces. $Coz-$pseudocompact uniform spaces are an analogue of topological pseudocompact spaces. The characterizations of $coz-$pseudocompact uniform spaces are proved by means of locally finite $u-$opencoverings, countable decreasing family of $u-$open sets. It is proved, that property of $coz-$pseudocompactness is equivalent to that for a uniform space the Wallman precompact uniformity coincides with $coz-$fine uniformity, hence, that uniform space is precompact. It has been shown that for a $coz-$pseudocompactuniform space $\beta-$like compactification and Wallman real compactification coincide.

Key words: *$u-$open, $u-$closed sets, $u-$continuous function, $coz-$pseudocompactness.*

В работе приняты обозначения из статей [5], [8], [2], [3]. Необходимая информация взята из статей [5], [8], [2] и доклада [7].

Знак □ - завершение доказательства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Равномерное пространство uX называется *$coz-$псевдокомпактным*, если всякая $u-$непрерывная функция ограничена, т.е. $C_u(X) = C_u^*(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ясно, что всякое $coz-$псевдокомпактное равномерное пространство является равномерно псевдокомпактным в смысле А.А.Борубаева [1]. Метрическое $coz-$псевдокомпактное равномерное пространство является топологически псевдокомпактным, следовательно, является метрическим компактом, в то время как, существуют равномерно псевдокомпактные не компактные метрические пространства. Например, “метрический ёж” $J(\mathfrak{m})$ колючести $\mathfrak{m}$ [4, Пример 4.1.5].

ТЕОРЕМА 3. *Для любого равномерного пространства uX следующие условия равносильны:*

(1) uX $coz-$псевдокомпактно.

(2) Каждое локально конечное $u-$открытое семейство не пустых $u-$открытых множеств в uX конечно.

(3) Каждое локально конечное $u-$открытое покрытие X непустыми $u-$открытыми множествами конечно.

(4) Каждое локально конечное $u-$открытое покрытие пространства uX содержит конечное подпокрытие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1)$\Rightarrow$(2). Предположим, (2) не выполнено. Тогда существует счётное локально конечное $u-$открытое семейство $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Пусть $x_n \in U_n$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда существуют такие $u-$непрерывные функции $f_n \in C_u(X)$, что $f_n(x_n)=\{n\}$ и $f_n(X \setminus U_n)\subset\{0\}$. В силу локальной конечности семейства $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ функция, определямая формулой $f(x)=\sum_{n=1}^{n}|f_n(x)|$ для любой точки $x\in X$, является $u-$непрерывной [8] и неограниченной, т.е. uX не $coz-$псевдокомпактно. Противоречие доказывает (1).

Импликации (2)$\Rightarrow$(3) и (3)$\Rightarrow$(4) очевидны.

(4)$\Rightarrow$(1). Пусть $f_n \in C_u(X)$ - произвольная $u-$непрерывная функция на пространстве uX. Тогда семейство $\{f^{-1}((i-1,i+1)) : i\in\mathbb{Z}\}$ - локально конечное $u-$открытое покрытие uX, из которого можно выделить конечное подпокрытие, следовательно функция f является ограниченной, и пространство uX $coz-$псевдокомпактно.

ТЕОРЕМА 4. *Для произвольного равномерного пространства uX следующие условия равносильны:*

(1) uX $coz-$псевдокомпактно.

(2) Для каждой убывающей последовательности $U_1\supset U_2\supset\ldots$ непустых $u-$открытых множеств в uX выполняется $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}[U_n]\neq\varnothing$.

(3) Для каждого счётноцентрированного семейства $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $u-$открытых в uX множеств $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}[V_n]_X\neq\varnothing$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1)$\Rightarrow$(2). Пусть uX $coz-$псевдокомпактно и $U_1\supset U_2\supset\ldots$ - убывающая последовательность непустых $u-$открытых множеств в uX. Тогда, в силу теоремы 3, последовательность $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не является локально конечной, т.е. существует точка $x\in X$ такая, что её каждая окрестность пересекает бесконечно много множеств U_n. Ясно, что выполнение $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[V_n]_X\neq\varnothing$.

(2)$\Rightarrow$(3). Положим $U_1=V_1, U_2=V_1\cap V_2,\ldots,V_n=\bigcap_{k=1}^{n}V_k,\ldots$. Тогда построенная последовательность $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является убывающей, и имеем, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[U_n]_X=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[V_n]_X\neq\varnothing$.

(3)$\Rightarrow$(1). Для некоторой $u-$непрерывной функции $f:uX\to\mathbb{R}$ множество $V_n=\{x\in X : |f(x)|>n\}$ $u-$открыто и семейство $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ счётноцентрированно. Имеем $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[V_n]_X=\varnothing$. Противоречие. Следовательно, функция f ограничена и пространство uX $coz-$псевдокомпактно.

ТЕОРЕМА 5. *Равномерное пространство uX $coz-$псевдокомпактно если и только, если $u_{cf}^{z}=u_{p}^{z}$ и uX является предкомпактным равномерным пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть равномерное пространство uX $coz-$псевдокомпактно и u_{cf}^{z} - $coz-$тонкая равномерность на X [9]. Равномерность u_{cf}^{z} имеет базу из всех локально конечных $coz-$аддитивных $u-$открытых покрытий равномерного пространства uX [6, 7]. Тогда, в силу теоремы 3, $u_{cf}^{z}=u_{p}^{z}$. Равномерность u содержится в u_{cf}^{z}, следовательно, $u-$предкомпактная равномерность, т.е. $u_p=u$ и $u\subseteq u_{p}^{z}$.

Обратно, пусть $u_{cf}^{z}=u_{p}^{z}$ и uX предкомпактно и $f:uX\to\mathbb{R}$ - произвольная $u-$непрерывная функция, т.е. $f\in C_u(X)$. Тогда f равномерно непрерывна относительно равномерности u_{cf}^{z}. Так как $u_{cf}^{z}=u_{p}^{z}$, то f является ограниченной $u-$непрерывной функцией, т.е. $f\in C_u^{*}(X)$. Итак, uX $coz-$псевдокомпактно.

ТЕОРЕМА 6. *Равномерное пространство* uX $coz-$*псевдокомпактно если и только, если любая центрированная последовательность* $u-$*замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $u-$замкнутых в uX множеств такая, что $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n = \varnothing$. Покажем, что в этом случае, uX не $coz-$псевдокомпактно. Пусть $Z_n = Z(f_n) = \{x \in X : f_n(x) = \{0\}$, где $f_n \in C_u(X)$. Тогда для функции $f(x) = \sum_{n=1}^{n} |f_n(x)|/2^n$, для любой точки $x \in X$, имеем $f \in C_u(X)$ [8]. Так как $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n = \varnothing$, то $f(x) \neq 0$ для любой точки $x \in X$. Следовательно, $g = 1/f \in C_u(X)$ [8] и $|g| \geq z^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т.е. функция g не ограничена. Это означает, что uX не $coz-$псевдокомпактно.

Обратно, пусть uX не $coz-$псевдокомпактно. Тогда существует не ограниченная $u-$непрерывная функция $f \in C_u(X)$. Множество $Z_n = \{x \in X : |f(x)| \geq 0\}$ $u-$замкнуто семейство $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ центрировано, но $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n = \varnothing$.

СЛЕДСТВИЕ 7. *Равномерное пространство* uX $coz-$*псевдокомпактно если и только, если каждый* z_u-*ультрафильтр является счётноцентрированным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть uX $coz-$псевдокомпактно и p - произвольный z_u-ультрафильтр. Тогда для любой последовательности $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset p$ имеем $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \neq \varnothing$.

Обратно, если последовательность $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $u-$замкнутых множеств центрирована, то она содержится в z_u-ультрафильтре p, который счётноцентрирован, следовательно $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \neq \varnothing$, т.е. uX $coz-$псевдокомпактно.

СЛЕДСТВИЕ 8. *Равномерное пространство* uX $coz-$*псевдокомпактно если и только, если* $\beta_u X = \upsilon_u X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если uX $coz-$псевдокомпактно, то $\beta_u X = \upsilon_u X$ по следствию 7 и по пострению $\beta_u X$ и $\upsilon_u X$ [8].

Обратно, если $\beta_u X = \upsilon_u X$, то по следствию 7, uX *является* $coz-$псевдокомпактным равномерным пространствам.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть* $f : uX \to vY$ *- сюрьективный* $coz-$*морфизм и* uX $coz-$ *псевдокомпактно. Тогда* vY *также* $coz-$*псевдокомпактно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g : vY \to \mathbb{R}$ - произвольная $u-$непрерывная функция. Тогда $g \circ f : uX \to \mathbb{R}$ также $u-$непрерывна и является ограниченной в силу, $coz-$псевдокомпактности uX. Следовательно, g также ограничена и vY $coz-$псевдокомпактно.

Список литературы:

1. *Борубаев А.А.* Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Бишкек, Илим, 1991. - 171 с.
2. *Чанбаева А.И.* Об *u*-совершенных отображениях //Проблемы современной науки и образования, 2016, №10 (52). С.16-20.
3. *Чекеев А.А., Рахманкулов Б.З.* О $\beta-$подобной компактификации и инверсно - замкнутых кольцах равномерных пространств //Вестник науки и образования, 2016, №6 (18). С. 6-14.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
5. *Chekeev A.A., Rakhmankulov B.Z., Chanbaeva A.I.* On C_u^*- и C_u-embedded uniform spaces //TWMS J. Pure Appl. Math.,(2017) (to appear).
6. *Chekeev A.A., Kasymova T.J.* Epi-reflective hull of all metric uniform spaces class with given weight //International conference dedicated 120 anniversary of Kazimierz Kuratowski, 2016, 27-30 September (Lviv, Ukraine), Topology Atlas, 2016, p.12-15.
7. *Chekeev A.A., Kasymova T.J.* Ultrafilter-completeness on zero-sets of uniformly continuous functions //TOPOSYM - 2016, 25-29 July (Prague, Czech Republic), Topology Atlas, 2016, p.76 (to appear).
8. *Chekeev A.A.*Uniformities for Wallmancompactifications and realcompactifications //Topol. Appl., 2016, V. 201, pp.145-156.
9. *Frolik Z.* A note on metric-fine spaces //Proc. Amer.Math.Soc., V.46, n.1, 1974, pp.111-119.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Касымова Т.Дж.