Какишов К., Какишов Ж.К., Садыкова Б.А.

ИМПУЛЬСТТУН ТААСИРИ АСТЫНДАГЫ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮККӨН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН БАШТАПКЫ МАСЕЛЕНИН АСИМПТОТИКАЛЫК ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Какишов К., Какишов Ж.К., Садыкова Б.А.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

K. Kakishov, J.K. Kakishov, B.A. Sadykova

ASYMPTOTIC SOLVING OF BOUNDARY EQUATION FOR SINGULAR PERTURBED NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE PRESSURE

УДК: 517.9

Импульсттук таасири астындагы, сызыктуу эмес сингулярдык дүүлүккөн дифференциалдык теңдеме үчүн асимптотикалык формуласынын чыгарылышы түзүлдү. $(0,1]$ кесиндисинде $\varepsilon \to 0$ учурда импульсттук, сингулярдык-дүүлүккөн дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселенин чыгарылышынын жалгыздыгынын жетиштүү шарттары алынды.

***Негизги сөздөр:** асимптотика, баштапкы маселе, импульсттун таасири, Хевисайддын тепкичтүү функциясы, Дирактын импульсттук дельта-функциясы, биринчи түрдөгү үзүлүү, кичине параметр.*

Построены асимптотические формулы для нелинейных сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием при $\varepsilon \to 0$ на отрезке $(0,1]$.

***Ключевые слова:** асимптотика, начальная задача, импульсное воздействие, ступенчатая функция Хевисайда, импульсная дельта-функция Дирака, разрыв первого рода, малый параметр.*

Asymptotic formulas for nonlinear singularly perturbed differential equations with impulse control were developed. Have been received enough conditions of existence and singularity of perturbed equations for singular perturbed differential equations with impulse control under $\varepsilon \to 0$ when on the segment $(0,1]$.

***Key words:** asymptotic boundary equation, impulse, Hevisayd's step function, impulse Dirac's delta function, the first kind of gap, a small parameter.*

В работе [1]-[2] исследованы разрывные решения сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений, когда вырожденное уравнение имеет разрывные решения. Здесь рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение с импульсным воздействием вида:

$$\varepsilon y'(x) = f_0(x,y) + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) f_k(x,y) + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} A_k \delta(p_k), \quad (0 \le x \le 1) \quad (1)$$

$$y(0) = b \ , \qquad (2)$$

где $0 < \varepsilon < 1$, A_k, b - известные постоянные.

$p_k = x - x_k, \quad 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < 1$ - некоторые числа.

$\theta(p_k)$ - функция Хевисайда; $\theta(+0) = 1$, $\theta(0) = 0$,

$\theta'(p_k) = \delta(p_k)$ - дельта-функция Дирака;

$$\delta(p_k) = \begin{cases} 0, & x \ne x_k \\ \infty, & x = x_k \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p_k)\, dx = 1$$

$f_k(x,y)$ пять раз непрерывно-дифференцируемая функция, причем производные ограничены:

$f_k(x_k, y) = f'_{kx}(x_k, y) = f''_{kx^2}(x_k, y) = 0, \quad k = \overline{0,N}$

$f'_{kxy}(x_k, y) \le -\alpha_k H(x)$, α_k-постоянная, $H(x) = \min\limits_{1 \le k \le N} \{ |x - x_k|^3, k = \overline{1,N} \}$.

Формально полагая $\varepsilon = 0$ из (1) получаем:

$$f_0(x,\upsilon) + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) f_k(x,\upsilon) = 0. \qquad (2_0)$$

Решение этого функционального алгебраического уравнения будем искать в виде:

$$\upsilon = \upsilon_0(x) + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k)\upsilon_k(x), \qquad (2_1)$$

где $\upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_N$ неизвестные непрерывные функции.

Подставляя (2_1) в (2_0) получаем:

$$f_0(x,\upsilon_0 + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k)\upsilon_k(x)) + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) f_k(x,\upsilon_0 + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k)\upsilon_k) =$$

$$= f_0(x,\upsilon_0) + \theta(p_1)(f_0(x,\upsilon_0 + \upsilon_1) + f_1(x,\upsilon_0 + \upsilon_1) - f_0(x,\upsilon_0)) +$$

$$+\theta(p_2)[\sum_{k=0}^{2} f_k(x,\sum_{k=0}^{2}\upsilon_k) - \sum_{k=0}^{1} f_k(x,\sum_{k=0}^{1}\upsilon_k)] + ... +$$

$$+\theta(p_k)[\sum_{k=0}^{N} f_k(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k) - \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x,\sum_{k=0}^{N-1}\upsilon_k)] = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при $\theta\left(p_k\right)$ получим:

$$f_0\left(x,\upsilon_0\left(x\right)\right) = 0 \quad \left(0 \le x \le 1\right), \qquad \left(2_2\right)$$

$$f_0\left(x,\upsilon_0 + \upsilon_1\right) + f_1\left(x,\upsilon_0 + \upsilon_1\right) = 0 \quad \left(x_1 \le x \le 1\right), \qquad \left(2_3\right)$$

- -

$$\sum_{k=0}^{N} f_k(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k(x)) = 0 \quad (x_N \le x \le 1). \qquad \left(2_N\right)$$

Предполагается, что решение $\upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_N$ соответственно удовлетворяют уравнениям $\left(2_2\right), \left(2_3\right)$ $, ..., \left(2_N\right)$.

Теорема. Пусть 1) вырожденное уравнение $\left(2_2\right)$-$\left(2_N\right)$ для (1)-(2) имеет устойчивое решение с конечным числом разрывов первого рода

$$\upsilon(x) = \upsilon_0 + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k)\upsilon_k(x), \quad 0 < x_1 < x_2 < ... < x_N < 1$$ - точки разрыва,

2) выполняется тождество $f_k(x_k, y) = f'_{kx}(x_k, y) = f''_{kx}(x_k, y) = 0$ в каждой из замкнутых областей $\left[0, x_1\right] \times R^m \times R^m$, $\left[x_1, x_2\right] \times R^m \times R^m, ..., \left(x_{N-1}, x_N\right] \times R^m \times R^m$, $\left[x_N, 1\right] \times R^m \times R^m$,

3) функция $f_k(x,y) \in C^5$,

4) $M(f^{IV}_{kx^3y}(x,y)) \le -\alpha_k H_k(x)$, $H_k(x) = \min\limits_{1\le k\le N}\{|x - x_k|^3, k = \overline{1,N}\}$ α_k - постоянная $\alpha_k > 0$.

Тогда задача Коши (1)-(2) имеет единственное разрывное решение, представимое в виде:

$$y(x,\varepsilon) = \upsilon_0(x) + \Pi_0(\tau) + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0(x,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k)(\upsilon_k(x) + \Pi_k(\tau_k) + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_k(x,\varepsilon))$$

где $\tau_k = \dfrac{|x - x_k|^3 (x - x_k)}{4\varepsilon}$, $\tau = \dfrac{x}{\varepsilon}$, $|\Pi_0| \le C_0 e^{-\alpha_0\tau}$, $C_0 > 0$,

$\prod_k(0) = A_k - \upsilon_k(x_k)$, $|\prod_k(\tau_k)| \le C_k e^{-\alpha_k \tau_k}$ -функция правого внутреннего пограничного слоя, ξ_0, ξ_k равномерно ограничены при $\varepsilon \to 0$.

Основные этапы доказательства.

Подстановкой:

$$y = y_0(x) + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k)\, y_k(x) \tag{3}$$

с начальным условием

$$y_0(0) = b. \tag{3_0}$$

Уравнение (1) приводится к виду:

$$\begin{aligned}\varepsilon y_0' + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \delta(p_k) y_k(x_k) + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) y_k{}' &= f_0(x, y_0 + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) y_k) + \\ + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) f_k(x, y_0 + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) y_k) &+ \varepsilon \sum_{k=1}^{N} A_k \delta(p_k).\end{aligned} \tag{3_1}$$

Приравнивая коэффициенты при $\delta(p_k)$, получим $y_k(x_k) = A_k$ $k = \overline{1, N}$. (3_2)

Уравнение (3_2) приводится к виду:

$$\varepsilon y_0' + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) y_k' = f_0(x, y_0 + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) y_k) + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) f_k(x, y_0 + \sum_{k=1}^{N} \theta(p_k) y_k). \tag{3_3}$$

Приравнивая коэффициенты при $\theta(p_k)$ получим следующую цепочку нелинейных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $y_0(x,\varepsilon), y_1(x,\varepsilon), ..., y_N(x,\varepsilon)$ на соответствующих отрезках:

$$\varepsilon y_0' = f_0(x, y_0(x,\varepsilon)) \ (0 \le x \le 1), \tag{3_4}$$

$$y_0(0) = b.$$

$$\varepsilon y_1' = \sum_{k=0}^{1} f_k(x, y_0 + y_1) - f_0(x, y_0) \ (x_1 \le x \le 1), \tag{3_5}$$

$$y_1(x_1) = A_1.$$

$$\varepsilon y_2' = \sum_{k=0}^{2} f_k(x, \sum_{k=0}^{2} y_k) - \sum_{k=0}^{1} f_k(x, \sum_{k=0}^{1} y_k) \ (x_2 \le x \le 1), \tag{3_6}$$

$$y_2(x_2) = A_2.$$

- -

$$\varepsilon y_N' = \sum_{k=0}^{N} f_k(x, \sum_{k=0}^{N} y_k) - \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x, \sum_{k=0}^{N-1} y_k) \ (x_N \le x \le 1), \tag{3_7}$$

$$y_N(x_N) = A_N.$$

Будем теперь решать систему (3_4)-(3_7)

Доказательство теоремы представим в виде серии лемм.

Лемма 1. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ нелинейное дифференциальное уравнение (3_4) имеет единственное непрерывное решение, представимое в виде:

$$y_0(x,\varepsilon) = \upsilon_0(x) + \prod_0(\tau) + \varepsilon^{\frac{1}{4}} \xi_0(x,\varepsilon), \tag{3_8}$$

где $\prod_0(\tau)$ -функция типа пограничного слоя.

$\xi_0(x,\varepsilon)$-на сегменте $[0,1]$ равномерно ограничено по ε, причем при $\varepsilon \to 0$. Это решение сходится к соответствующему ему непрерывному решению вырожденного уравнения (2_2) на полусегменте $(0,1]$.

Доказательство леммы 1. Начальные условия для неизвестных функций (3_8) возьмем в виде:

$$\Pi_0(0) = b - \upsilon_0(0),\ \ \xi_0(0,\varepsilon) = 0. \qquad (3_9)$$

Подставив (3_8) в (3_4) получим:

$$\varepsilon\upsilon_0' + \dot{\Pi}_0 + \varepsilon \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{4}}\xi_0' = f_0(x,\upsilon_0 + \Pi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0) = f_0(0,\upsilon_0(0) + \Pi_0) + [\,f_0(x,\upsilon_0(x) + \Pi_0) -$$

$$- f_0(0,\upsilon_0(0) + \Pi_0)] + [\,f_0(x,\upsilon_0 + \Pi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0) - f_0(x,\upsilon_0 + \Pi_0)].$$

Уравнения для Π_0 и ξ_0 возьмем в виде:

$$\dot{\Pi}_0 = f_0(0,\upsilon_0(0) + \Pi_0),\ 0 < \tau < \infty \qquad (4)$$

$$\varepsilon\xi_0' = g_0(x,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}[\,f_0(x,\upsilon_0 + \Pi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0) - f_0(x,\upsilon_0 + \Pi_0)]$$

где $g_0(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{\frac{3}{4}}\upsilon_0' + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}[\,f_0(x,\upsilon_0 + \Pi_0) - f_0(0,\upsilon_0(0) + \Pi_0)]$.

Имеет место оценка:

$$|\Pi_0| \le |b - \upsilon_0(0)|\, e^{-\alpha_0\tau}, \qquad (4_0)$$

где $f_{0y}'(0,\upsilon_0(0)) \le -\alpha_0 = const > 0$,

$$|g_0(x,\varepsilon)| \le C_0\varepsilon^{\frac{3}{4}} + C_0\frac{x}{\varepsilon}\Pi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|\,\varepsilon^{\frac{3}{4}} \le C_0\,\varepsilon^{\frac{3}{4}}.$$

$$\varepsilon\xi_0' = g_0(x,\varepsilon) + f_{0y}'(x,\upsilon_0 + \Pi_0)\xi_0 + f_{0y^2}''(x,\upsilon_0 + \Pi_0 + \theta_0\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0)\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi_0^{\,2}}{2}] =$$

$$= g_0(x,\varepsilon) + f_{0y}'(x,\upsilon_0)\xi_0 + \gamma(x,\xi_0,\varepsilon) = g_0(x,\varepsilon) + f_{0x^3y}^{(IV)}(x,\upsilon_0)\,|x - x_1|^3\ \xi_0 +$$

$$+\gamma_0(x,\xi_0,\varepsilon),$$

где

$$|\gamma_0(x,\xi_0,\varepsilon)| = \left[\,f_{0y}'(x,\upsilon_0 + \Pi_0) - f_{0x^3y}^{(IV)}(x,\upsilon_0)\,|x - x_1|^3\right]\xi_0 +$$

$$+ f_{0x^3y^2}^{(V)}(x,\upsilon_0 + \Pi_0 + \theta_0\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0)\frac{\xi_0^2}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,|x - x_1|^3 \le$$

$$\le C_0\,|\Pi_0|\,|\xi_0|\,|x - x_1|^3 + C_0\,|x - x_1|^3\ \varepsilon^{\frac{1}{2}}\,|\xi_0|^2.$$

Решение (4_0) запишется в виде:

$$\xi_0(x,\varepsilon)=\int_0^x e^{\frac{-\alpha_0}{\varepsilon}\int_s^x|t-x_1|^3dt}\frac{1}{\varepsilon}[g_0(s,\varepsilon)+(s-x_1)^3\gamma_0(s,\xi_0,\varepsilon)]ds=$$

$$=\int_0^{x_1}e^{-\frac{\alpha_0}{4\varepsilon}(x_1-s)^4}\frac{1}{\varepsilon}g_0(s,\varepsilon)ds+\int_0^{x_1}e^{-\frac{\alpha_0}{4\varepsilon}(x_1-s)^4}(x_1-s)\gamma_0(s,\xi_0,\varepsilon)ds+$$

$$+\int_{x_1}^x e^{-\frac{\alpha_0}{4\varepsilon}[(x-x_1)^4-(s-x_1)^4]}\frac{1}{\varepsilon}[g_0(s,\varepsilon)+(s-x_1)^3\gamma_0]ds.$$

Используя оценку

$$\int_0^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x^2-s^2)]}s^k ds\le C\sqrt{\varepsilon^{k+1}},\quad k=0,1.$$

Имеет оценку:

$$|\xi_0|\le C_0+C_0|b-\upsilon_0(0)||\xi_0|+\varepsilon^{\frac{1}{4}}C_0|\xi_0|^2,$$

при $|b-\upsilon_0(0)|\le\frac{1}{2C_0}\quad 0<\varepsilon^{\frac{1}{4}}<\frac{1}{16C_0^{\,2}}$,

$$|\xi_0|\le 4C_0,\ 0\le x\le 1. \qquad (4_2).$$

Таким образом, лемма доказана.

Лемма 2. Существует такое $\varepsilon_1>0$, что при $\varepsilon<\varepsilon_1$ нелинейное дифференциальное уравнение (3_5) имеет единственное непрерывное решение, представимое в виде:

$$y_1(x,\varepsilon)=\upsilon_1(x)+\prod\nolimits_1(\tau_1)+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_1(x,\varepsilon), \qquad (4_3)$$

где $\prod_1(\tau_1)$ - функция типа пограничного слоя в точке $x=x_1$, функция ξ_1 на сегменте $[x_1,1]$ равномерно ограничена по ε, причем при $\varepsilon\to 0$ это решение сходится к соответствующему непрерывному решению вырожденного уравнения (2_3) на полусегменте $(x_1,1]$.

Доказательство леммы 2.

В уравнение (3_5) сделаем подстановку вида (4_3) со следующими начальными условиями:

$$\prod\nolimits_1(0)=A_1-\upsilon_1(x_1),\ \xi_1(x_1,\varepsilon)=0, \qquad (4_4)$$

где $\prod_1$, ξ_1-пока неизвестные функции.

Уравнение (3_5) приводится к виду

$$\varepsilon\upsilon_1' + \dot{\Pi}_1 |x-x_1|^3 + \varepsilon\cdot\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_1' = \sum_{k=0}^{1} f_k(x,\upsilon_0+\Pi_0+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0+\upsilon_1+\Pi_1(\tau_1)+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_1)-$$

$$-f_0(x,\upsilon_0+\Pi_0+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0) \approx \sum_{k=0}^{1} f_k(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}(\xi_0+\xi_1)] - f_0(x,\upsilon_0+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} f'''_{kx^3}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}(\xi_0+\xi_1)) - f'_{0x^3}(x,\upsilon_0+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0)|x-x_1|^3 =$$

$$= |x-x_1|^3 \sum_{k=0}^{1}\Big\{\Big[f'''_{kx^3}(x_1,\upsilon_0(x_1)+\upsilon_1(x_1)+\Pi_1) + \Big[f'''_{kx^3}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1) - f'''_{kx^3}(x_1,\upsilon_0(x_1)+$$

$$+\upsilon_1(x_1)+\Pi_1)\Big] + \Big[f'''_{kx^3}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0) - f'''_{kx^3}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1)\Big] +$$

$$+[f'''_{kx^3}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}(\xi_0+\xi_1)) - f'''_{kx^3}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0)]\Big\} -$$

$$-|x-x_1|^3\ f^{(IV)}_{0x^3y}(x,\upsilon_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0)\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0.$$

Уравнения для $\Pi_1(\tau_1)$ возьмем в виде:

$$\dot{\Pi}_1(\tau_1) = \sum_{k=0}^{1} f'''_{kx^3}(x_1,\upsilon_0(x_1)+\upsilon_1(x_1)+\Pi_1). \qquad (4_6)$$

Имеет место оценка

$$|\Pi_1(\tau_1)| \le e^{-\alpha_1\tau_1}(A_1-\upsilon_1(x_1)), \qquad (4_7)$$

где $\sum_{k=0}^{1} f^{(IV)}_{kx^3y}(x_1,\upsilon_0(x_1)+\upsilon_1(x_1)) \le -\alpha_1 = const > 0.$

Неизвестная функция $\xi_1(x,\varepsilon)$ определяется из следующего нелинейного дифференциального уравнения:

$$\varepsilon\xi_1'(x,\varepsilon) = g_1(x,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}\sum_{k=0}^{1}[f'''_{kx^3}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}(\xi_0+\xi_1)) - f'''_{kx^3}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+ \qquad (4_8)$$

$$+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0)]\,|x-x_1|^3, \quad (x_1 < x \le 1),$$

$$\xi_1(x_1,\varepsilon) = 0,$$

где

$$g_1(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{\frac{3}{4}}\upsilon_1' + \frac{|x-x_1|^3}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}\sum_{k=0}^{1}\{[f'''_{kx^3}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1) - f'''_{kx^3}(x_1,\upsilon_0(x_1)+$$

$$+\upsilon_1(x_1)+\Pi_1)] + [f'''_{kx^3}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0) - f'''_{kx^3}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1)]\} -$$

$$-|x-x_1|^3\ f^{(IV)}_{0x^3y}(x,\upsilon_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0)\xi_0.$$

Имеет место оценка:

$$|g_1(x,\varepsilon)| \le C_1\varepsilon^{\frac{3}{4}} + C_1|x-x_1|^3.$$

Обозначим

$$\gamma(x,\xi_1,\varepsilon)\equiv\frac{|x-x_1|^3}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}\sum_{k=0}^{1}[f'''_{kx^3}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}(\xi_0+\xi_1))-f'''_{kx^3}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0)]=|x-x_1|^3\sum_{k=0}^{1}\Big[f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0)\xi_1+f^{(V)}_{kx^3y^2}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+$$

$$\left.+(\xi_0+\theta_0\xi_1))\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_1^2}{2}\right]=|x-x_1|^3\sum_{k=0}^{1}\Big[f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\upsilon_0+\upsilon_1)\xi_1+ \qquad (4_9)$$

$$+|x-x_1|^3\sum_{k=0}^{1}\Big[f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0)-f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\upsilon_0+\upsilon_1)]\xi_1+$$

$$+|x-x_1|^3\sum_{k=0}^{1}f^{(V)}_{kx^3y^2}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}(\xi_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_1))\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_1^2}{2}.$$

Подставляя (4_9) в (4_8) получим

$$\varepsilon\xi_1'=|x-x_1|^3\sum_{k=0}^{1}f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\upsilon_0+\upsilon_1)\xi_1+g_1(x,\varepsilon)+\gamma_1(x,\xi_1,\varepsilon) \qquad (5)$$

$$\xi_1(x,\varepsilon)=0,$$

где

$$\gamma_1(x,\xi_1,\varepsilon)\equiv|x-x_1|^3\sum_{k=0}^{1}[f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0)-f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\upsilon_0+\upsilon_1)]\xi_1+$$

$$+|x-x_1|^3\,\varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{1}f^{(V)}_{kx^3y^2}(x,\upsilon_0+\upsilon_1+\Pi_1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}(\xi_0+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_1))\frac{\xi_1^2}{2}.$$

Имеет место оценка

$$|\gamma_1(x,\xi_1,\varepsilon)|\le|x-x_1|^3\,C_1[|\Pi_1|+\varepsilon^{\frac{1}{4}}|\xi_0|]|\xi_1|+|x-x_1|^3\,\varepsilon^{\frac{1}{4}}\,C_1|\xi_1|^2.$$

Задача Коши (5) эквивалентна интегральному уравнению.

$$\xi_1(x,\varepsilon)=\int_{x_1}^{x}e^{-\frac{\alpha_1}{4\varepsilon}[(x-x_1)^4-(s-x_1)^4]}\,\frac{1}{\varepsilon}[g_1(s,\varepsilon)+\gamma_1(s,\xi_1,\varepsilon)]\,ds,$$

где

$$\sum_{k=0}^{1}f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\upsilon_0+\upsilon_1)\le-\alpha_1=const>0\,.$$

Отсюда имеет место оценка

$$|\xi_1|\le C_1+C_1|A_1-\upsilon_1(x_1)||\xi_1|+C_1\varepsilon^{\frac{1}{4}}(|\xi_1|+|\xi_1|^2).$$

$$|\xi_1|\le4C_1,\ |A_1-\upsilon_1(x_1)|\le\frac{1}{2C_1},\quad 0<\varepsilon^{\frac{1}{4}}<\frac{1}{4C_1(1+4C_1)},\quad (x_1\le x\le1).$$

Таким образом, лемма доказана.

Лемма 3. Существует такое ε_k, что при $\varepsilon<\varepsilon_k$ нелинейные дифференциальные уравнения $(3_6)-(3_7)$ имеют решение в виде:

$$\begin{aligned}&y_2(x)=\upsilon_2(x)+\Pi_2(\tau_2)+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_2(x,\varepsilon),\ldots,y_{N-1}(x)=\upsilon_{N-1}(x)+\Pi_{N-1}(\tau_{N-1})+\\&+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_{N-1}(x,\varepsilon),\quad y_N(x)=\upsilon_N(x)+\Pi_N(\tau_N)+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_N(x,\varepsilon),\end{aligned} \qquad (5_0)$$

где $\Pi_k(\tau_k)$ - функции типа пограничного слоя, $\xi_k(x,\varepsilon)$ на сегменте $[x_k, 1]$ равномерно ограничены при $\varepsilon \to 0, \quad k=\overline{2,N}$.

Решение нелинейных дифференциальных уравнений $(3_6), (3_7)$ будем искать в виде (5_0) с начальными условиями:

$$\Pi_N(0) = A_N - \upsilon_N(x_N), \quad \xi_N(x_N,\varepsilon) = 0. \qquad (5_1)$$

Подставим (5_0) в уравнение (3_N) получим:

$$\varepsilon\upsilon_N' + \dot{\Pi}_N(\tau_N)|x-x_N|^3 + \varepsilon\cdot\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_N' = \sum_{k=0}^{N} f_k(x,\upsilon_0 + \Pi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0 + \upsilon_1 + \Pi_1 +$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_1 + \ldots + \upsilon_N + \Pi_N + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_N) - \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x,\upsilon_0 + \Pi_0 + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_0 + \sum_{k=1}^{N-1}(\upsilon_k + \Pi_k + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_k) \approx$$

$$\approx \sum_{k=0}^{N} f_k(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k + \Pi_N + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N}\xi_k) - \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x,\sum_{k=0}^{N-1}\upsilon_k + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} f'''_{kx^3}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k + \Pi_N + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N}\xi_k)|x-x_N|^3 - \sum_{k=0}^{N-1} f'''_{kx^3}(x,\sum_{k=0}^{N-1}\upsilon_k + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k)|x-x_N|^3 =$$

$$= |x-x_N|^3 \sum_{k=0}^{N} f'''_{kx^3}(x_N,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k(x_N) + \Pi_N(\tau_N)) + |x-x_N|^3 \sum_{k=0}^{N}[(f'''_{kx^3}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k(x) + \Pi_N) -$$

$$- f'''_{kx^3}(x_N,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k(x_N) + \Pi_N)) + (f'''_{kx^3}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k(x) + \Pi_N + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k) - f'''_{kx^3}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k + \Pi_N)) +$$

$$+(f'''_{kx^3}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k + \Pi_N + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N}\xi_k) - f'''_{kx^3}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k + \Pi_N + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k))] -$$

$$- |x-x_N|^3 \sum_{k=0}^{N-1} f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\sum_{k=0}^{N-1}\upsilon_k + \theta_0\varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k)\varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k. \qquad (5_2)$$

Уравнения для $\Pi_N(\tau_N)$ возьмем в виде:

$$\dot{\Pi}_N(\tau_N) = \sum_{k=0}^{N} f'''_{kx^3}(x_N,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k(x_N) + \Pi_N), \qquad (5_3)$$

$$\Pi_N(0) = A_N - \upsilon_N(x_N).$$

Имеет место оценка:

$$|\Pi_N(\tau_N)| \le |A_N - \upsilon_N(x_N)| e^{-\alpha_N\tau_N}, \qquad (5_4)$$

где

$$\sum_{k=0}^{N} f^{(IV)}_{kx^3y}(x_N,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k(x_N)) \le -\alpha_N = const > 0.$$

Неизвестная функция определяется из следующего нелинейного дифференциального уравнения:

$$\varepsilon\xi_N' = g_N(x,\varepsilon) + \frac{|x-x_N|^3}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}\sum_{k=0}^{N}[f'''_{kx^3}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k + \Pi_N + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N}\xi_k) -$$

$$- f'''_{kx^3}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k + \Pi_N + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k)], \qquad (5_5)$$

где

$$g_N(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{\frac{3}{4}}\upsilon'_N + \frac{|x-x_N|^3}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}\sum_{k=0}^{N}[f'''_{kx^3}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k + \Pi_N) -$$

$$-f'''_{kx^3}(x_N,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k(x_N)+\Pi_N)) + (f'''_{kx^3}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k(x)+\Pi_N+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k) -$$

$$-f_k(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k+\Pi_N))] - |x-x_N|^3\sum_{k=0}^{N-1}f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\sum_{k=0}^{N-1}\upsilon_k+\theta_0\varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k)\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k.$$

Имеет место оценка:

$$|g_N(x,\varepsilon)| \le C_N\,\varepsilon^{\frac{3}{4}} + C_N\,|x-x_N|^3.$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (5_5) запишем в виде:

$$\varepsilon\xi'_N = g_N(x,\varepsilon) + |x-x_N|^3\sum_{k=0}^{N}f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k)\xi_N + |x-x_N|^3\sum_{k=0}^{N}\{[f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k +$$

$$+\Pi_N+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k) - f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k)]\xi_N + f^{(V)}_{kx^3y^2}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k+\Pi_N+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{N-1}\xi_k +$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\theta_0\xi_N)\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}\xi_N^2}{2}\},$$

$$\sum_{k=0}^{N}f^{(IV)}_{kx^3y}(x,\sum_{k=0}^{N}\upsilon_k) \le -\alpha_N = const > 0.$$

Переходим к интегральному уравнению:

$$\xi_N(x,\varepsilon) = \int_{x_N}^{x} e^{-\frac{\alpha_N}{4\varepsilon}[(x-x_N)^4-(s-x_N)^4]}\frac{1}{\varepsilon}[g_N(s,\varepsilon)+(s-x_N)\gamma_N(s,\xi_N,\varepsilon)]ds. \qquad (5_6)$$

Функция $\gamma_N(x,\xi_N,\varepsilon)$ удовлетворяет оценку

$$|\gamma_N(x,\xi_N,\varepsilon)| \le C_N\,|A_N-\upsilon_N(x_N)|\,|\xi_N| + \varepsilon^{\frac{1}{4}}C_N(|\xi_N|+|\xi_N|^2). \qquad (5_7)$$

Из (5_6) имеем

$$|\xi_N| \le C_N + C_N\,|A_N-\upsilon_N(x_N)|\,|\xi_N| + \varepsilon^{\frac{1}{4}}C_N[|\xi_N|+|\xi_N|^2]$$

$|\xi_N| \le 4C_N$, при $|A_N-\upsilon_N(x_N)| \le \frac{1}{2C_N}$, $\quad 0<\varepsilon^{\frac{1}{4}}<\frac{1}{4C_N(1+4C_N)}$ на сегменте $x_N \le x \le 1$

Лемма доказана. Таким образом, совершается доказательство теоремы.

Литература:

1. Какишов К.К. // Разрывные решения сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений. – IV конференция по дифференциальным уравнениям и их приложениям. Руссе, Болгария, август, 1989г. Рез.докл. и сообщ. – Руссе, 1989г. – стр. 138.
2. Какишов К.К. Сингулярные возмущения, имеющих разрывные решения // Дифференциальные уравнения – 1990г. – Т.26 №12, - стр. 2181.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Темиров Б.К.