МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Шалпыков Б.К., Абдраимова М.А.

БИР КАЛЫПТАГЫ АЧЫК КӨПТҮКТӨР АРКЫЛУУ МЕТРИКАЛЫК ӨЛЧӨМДҮН АНАЛОГУ ЖӨНҮНДӨ

Шалпыков Б.К., Абдраимова М.А.

О РАВНОМЕРНОЙ АНАЛОГИИ МЕТРИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

B.K. Shalpykov, M.A. Abdraimova

ON THE UNIFORM DIMENSION AN ANALOGY OF THE METRIC DIMENSION OF POINTWISE SETS

УДК:515.12

Бул иште метрикалык өлчөмдөр лебегдин жабдылуусу аркылуу бир калыптуу көптүктөр менен мүнөздөлөт. 1-теоремадан метрикалык өлчөмдү бир калыптагы ачык көптүктөр аркылуу толук чектелген мейкиндиктерди чектүү жабдуулар менен мүнөздөлүшү келип чыгат. Чындыгында толук мүнөздөгү жабдуулар метрикалык мейкиндиктерде δ - торчосунан эң кичине δ - болгондогу жабдуулардын бар экендигин далилдейт. Андан ары бир калыптагы көптүк аркылуу метрикалык мейкиндиктердин өлчөмү чектүү ачык көптүктөр аркылуу аныкталат. Акырында бир калыптагы ачык метрикалык өлчөмдү полиэдрге ε - жылдыруусу мүнөздөлөт.

Негизги сөздөр: *бир калыптуу ачык метрикалык өлчөм, лебег жабдуусу, ε - жылдыруу, жабдуу, δ - торчо, толук чектелген, бир жабдуудан башка жабдууга ичтен сызылуу.*

В этой работе приводится характеристика равномерно открытой метрической размерности с помощью, так называемых лебеговых покрытий. Из теоремы 1 следует, что для определения равномерно открытой метрической размерности волне ограниченных пространств достаточно конечных покрытий. В самом деле, понятие полной ограниченности метрического пространства предполагает существование в нем конечной δ - сети при столь угодно малом δ, и существование сколь угодно мелких конечных лебеговых покрытий этого пространства. Далее, доказывается теорема, позволяющая определять равномерно открытую метрическую размерность точечных множеств с помощью открытых покрытий, локально конечных в эвклидовых пространствах, содержащих эти множества. Наконец, приводится характеристика равномерно открытой метрической размерности с помощью ε - сдвигов в полиэдры.

Ключевые слова: *равномерно открытая метрическая размерность, лебеговое покрытие, ε - сдвиг, покрытия, δ - сеть, полная ограниченность, вписанность одного покрытия в другое покрытие.*

The article shows the characteristic of a uniformly open metric dimersion with the help of so-called lebegov covers. From Theorem 1 follows for determining an uniformly open metric dimension, is enough a wave of bounded spaces has enough finite covers. In fact, the concept of complete boundedness of a metric space supposes the existence of a finite net in it for arbitrarily small δ, and the existence of arbitrarily small finite lebegov coverings of this space. Next, we prove a theorem that allows us to determine the uniformly open metric dimension of point sets by means of open coverings that are locally finite in Euclidean spaces containing these sets. In the end, we gave a characterization of a uniformly open metric dimension by means of shifts to polyhedral.

Key words: *uniformly open metric dimension, lebegov covers, - shear, coverings, - a network full of limitations, inscription of one coating in another coating.*

В работе [6] М.Ж. Хараламбуссом для равномерных пространств введена и исследована размерностная функция в смысле равномерно открытых покрытий, которая обозначается через Dim, в той же работе для Dim доказаны теоремы счетной суммы, теорема произведение, неравенство Урысона – Менгера, теорема о «наследственности» и т.д. Там же показано, что Линделёфовых и метрезуемых пространствах Dim совпадает с размерностью Катетова- Смирнова dim [5].

В статье использована терминология и обозначения из монографии [2].

Приведем определения равномерно открытого множества и некоторые известные факты относительно размерности Dim.

Определение 1 [3], [6]. Подмножество G равномерного пространства (X,U) называется *равномерно открытым*, если существуют открытое множество H метрического пространства (Y,ρ) и равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,\rho)$, удовлетворяющее условию $G=f^{-1}(H)$. Дополнения равномерно открытых множеств называется *равномерно замкнутым*. Покрытие [5], состоящее из равномерно открытых множеств, называется *равномерно открытым*.

Определение 2 [2]. Размерность $DimX$ - *целочисленная функция*, удовлетворяющее следующим условиям:

$DimX=-1$, если и только если $X=\varnothing$, для любого $n\in N\cup\{0\}$. $DimX\le n$, если для каждого конечного равномерно открытого покрытия пространства X существует вписанное в него равномерно открытое покрытие кратности $\le n$.

$DimX=n$, если $DimX\le n$ и $DimX\le n-1$ не имеет места. Если каждое непустое открытое подмножество пространства X является равномерно открытым, то $DimX=dimx$.

Определение 3 [4]. Равномерно открытое метрической размерностью пространства X называется *неотрицательное число* r такое, что при любом числе $\varepsilon>0$ существует открытое покрытие пространства X кратности $r+1$, каждый элемент которого имеет диаметр меньше ε, и при некотором $\varepsilon>0$ всякое открытое ε - покрытие этого пространства имеет кратность, большую или равную $r+1$.

Приводим характеристику равномерно открытой метрической размерности с помощью, так называемых *лебеговых покрытий*.

Определение 4[3]. Равномерно открытое покрытие λ метрического пространства X назовем *лебеговым покрытием*, если для некоторого числа $\eta>0$ существует покрытие пространство X множествами A_γ такое, что покрытие пространство X окрестностями $O(A_\gamma,\eta)$ вписано в покрытие λ. Число это η будем называть *лебеговым числом* покрытия λ.

Теорема 1. *Равномерно метрическая размерность пространства* X *меньше или равна* r *(*$DimX\le r$*) в том и только в том случае, если в любоелебеговое покрытия этого пространства можно вписать равномерно открытое покрытие кратности, меньшей или равной* $r+1$.

Доказательство. Пусть дано некоторое положительное число ε. Выберем какое - нибудь положительное число $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$, например, положим $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$. Построим в пространстве X δ - сеть. Для этого как это обычно делается, выберем в пространстве X какую - нибудь точку x_1. Если x_1 не является δ - сетью, то в X существует x_2 такая, что имеет место неравенство $\rho(x_1,x_2)\ge\delta$. Если точки x_1,x_2 не составляют δ - сети пространство X, то в X существует третья точка x_3, удаленное от x_1,x_2 не меньше чем на δ. Продолжая этот процесс дальше новых точек трансфинитными индексами, в конце концов, построен δ - сеть пространства X. Сферические окрестности $O(x_\gamma,\frac{\varepsilon}{2})$ образуют нужное нам лебегово ε - покрытие пространство X. В самом деле, система окрестностей $O(x_\gamma,\delta)$, в силу нашего построения, является покрытием пространства X, приче X м при любом γ имеет место включение

$$O(O(x_\gamma,\delta),\eta)\subseteq O(x_\gamma,\frac{\varepsilon}{2}),\text{ где}$$

$$\eta\le\frac{\varepsilon}{2}-\delta.$$

Обратно, пусть равномерно открытые множества O_γ составляет некоторое лебегово покрытия λ пространства X и пусть η - лебегово число этого покрытия. Выберем равномерно открытие покрытия α пространства X кратности меньшей или равной $r+1$, каждый элемент которого по диаметру меньше η (это следует по условию теоремы). Можно показать, что покрытие α вписано в данное лебеговое покрытие λ определим равномерно открытые множества O_γ следующим образом: для $r=1$ положим O_γ равным сумме всех элементов покрытий α, содержавшиеся в O_1, а для всех последующих r определим O_γ как сумму всех элементов покрытия α, включенных в O_γ и невошедших в не одно из множеств O'_γ, где $\gamma'<\gamma$. Таким образом, множества O'_r составляют покрытие пространство X, вписанное в покрытие λ и той же кратности, что и покрытия α теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть множество* M *включено в пространство* E^n. *Метрическая* *равномерная размерность множество M тогда и только тогда меньше или равна r, тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует равномерно открытое ε – покрытие множество M кратности, меньшей или равной локально конечное в пространстве E^n. Докажем его необходимость.*

Пусть имеет место неравенство $DimM \le r$ покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется равномерно открытое ε– покрытие множества M кратности меньшей или равной $r+1$ локально конечное в пространстве E^n. Для этого, выбрав в пространстве E^n какую-нибудь ортогональную систему координат с осями $Ox_1,...,Ox_n$, рассмотрим плоскости вида $x_i = \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{n}} j \ (i=1,2,...,n; j=1,2,...,n)$. Эти плоскости разбивает пространство E^n на равные кубы $V_1, V_2,...,$. Диаметр каждого из которых равен $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Выбираем η, удовлетворяющее условию $0 < \eta < \dfrac{\varepsilon}{4}$, и рассмотрим множество множества $O_i = O(V_i, \eta)(i=1,2,...)$. Легко видеть, что O_i составляет лебевого покрытие пространства E^n, локально конечно в этом пространстве, причем диаметр каждого из множеств O_i меньше ε. Рассмотрим множество $O_i \cap M$. Эти множества, очевидно, составляют лебевого покрытие λ множества M, поэтому согласно теореме 1, существует открытое покрытие α множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, комбинаторно вписанное в покрытие λ. А так как покрытие λ (по построению) – локально конечно в пространстве E^n, то поскольку α комбинаторно вписано в λ, тем же свойством будет обладать и покрытие α. Достаточное условие этой теоремы доказывается просто. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть M - множество пространства E^n. Для того чтобы равномерно метрическая размерность множества M была меньше или равна r необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовал ε - сдвиг множества M в локально конечный полиэдр размерности, меньшей или равной r, лежащий в том же пространстве E^n.*

Докажем прежде необходимость, т.е. покажем что при любом $\varepsilon > 0$ и при условии $DimM \le r$ существует ε - сдвиг множества M в локально конечно полиэдр $P \subset E^n$ размерности, меньшей или равной $r+1$.

Пусть ε - произвольное положительное число. Согласно теореме 2, существует открытое ε - покрытие α множество M кратности, меньшей или равной $r+1$, локально конечное в пространстве E^n. Пусть множества $O_1, O_2,...$–элементы этого покрытия. Выбрав по точке в каждом из множеств O_i, $(i=1,2,...)$, реализуем нерв покрытие α в пространстве E^n (при этом, разумеется, может случиться, что среди симплексов этого нерва окажутся вырожденные). Следует заметить, что система вершин реализованного таким образом нерва покрытия α, так же как и система множеств O_i, локально конечна в пространстве E^n, откуда следует, что и сам этот нерв, локально конечен в пространстве E^n.Пусть полиэдр P есть тело построенного нерва покрытие α и пусть φ - барицентрическое отображение множества M в этом полиэдр. Рассмотрим произвольную точку x множества M. Точка x отображением φ переводите в симплекс, вершинами которого служат точки элементов покрытия α, содержащих эту точку. Так как все элементы покрытия α по диаметру меньше ε, то и расстояние между точками x и $\varphi(x)$ так же меньше ε, а это и означает, что отображение φ есть ε - сдвиг. Построенный нерв покрытие α, конечно, не быть триангуляцией полиэдра P, так как в нем могут встречаться как вырожденные, так и пересекающиеся симплексы. Но каждый из этих симплексов можно подразделить на конечное число более мелких симплексов так, чтобы в конце получилось триангуляция полиэдра P. Такая триангуляция будет локально конечной в пространстве E^n, так как локально конечным в пространстве E^n является нерв подразделениям которого служит эта триангуляция.

Теперь докажем достаточность. Пусть при любом положительном ε существует ε - сдвиг множества M в локально конечный полиэдр P размерности, меньшей или равной r.

Покажем, что каково бы ни было $\delta > 0$, существует открытое покрытие множества M

кратности, меньшей или равной $r+1$, диаметр каждого элемента которого меньше δ.

Пусть δ - произвольное положительное число [1]. Тогда, выбрав положительное $\varepsilon < \frac{\delta}{3}$, рассмотрим ε - сдвиг множества M в локально конечный полиэдр $P \subset E^n$ размерности, меньшей или равной r. Пусть K - локально конечная триангуляция полиэдра P. Не уменьшая общности, можно считать, что диаметр каждого симплекса этой триангуляции меньше $\frac{\sigma}{2}$, обозначив вершины триангуляции K через $e_1, e_2, ...,$ рассмотрим звезды Oe_i, ($i = 1,2,...$) всех этих вершин. Эти звезды составляют открытое локально конечное в пространстве E^n δ - покрытие полиэдра P кратности, меньшей или равной $r+1$ (точнее, кратность этого покрытия на единицу больше размерности полиэдра P). Рассмотрим множества $\varphi^{-1}(Oe_i)$. Диаметр каждого из этих множеств меньше δ, так как для любых двух точек x' и x'' множества $\varphi^{-1}(Oe_i)$ при любом i имеем:

$$\rho(x^{'}, x'') \le \rho(x', \varphi(x')) + \rho(\varphi(x'), \varphi(x'')) + \rho(x'', \varphi(x'')) < 3E < \sigma$$

.Кроме того, система множеств $\varphi^{-1}(Oe_i)$ имеет кратность, меньшую или равную $r+1$. Таким образом, мы построили открытое (даже локально конечное в пространстве E^n) покрытие множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, диаметр каждого элемента которого меньше σ. Теорема доказана.

Здесь локальная конечность полиэдра понимается в следующем смысле [1]:

Пусть P - полиэдр, лежащий в пространстве E^n. Полиэдр P называется *локально конечным*, если существует триангуляция полиэдра P такая, что система симплексов этой триангуляции локально конечна в пространстве E^n.

Литература:

1. Александров П.С. Комбинаторная топология, М.-Л., Гостехиздат, 1947.
2. Борубаев А.А. Равномерная топология, - Бишкек, Илим, 2013. -338с.
3. Егоров В.И. О метрической размерности точечных множеств. Мат. сборник. Т. 48. Москва 1990. №2.
4. Смирнов Ю.М. О метрической размерности в смысле П.С. Александрова. Изв. АНСССР.1956. серия матем. №20. С. 679-684.
5. Шалпыков Б.К. О факторизационных теоремах исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып. 39.
6. Charalambousm.g.further theory and applications of covering dimension of uniform spaces. Micosia, Recened July 28, 1988.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Канетов Б.Э.