МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICS SCIENCE

Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А.

БУССИНЕСКА – ЛЯВАНЫН ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫМДУУЛУГУ ЖӨНҮНДӨ

Аблабеков Б.С., Касымалиева А.А.

О РАЗРЕШИМОСТИ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА – ЛЯВА

B.S. Ablabekov, A.A. Kasymalieva

ON SOLVABILITY OF SOLUTIONS OF THE FIRST INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR THE EQUATIONS BOUSSINESQ – LOVE

УДК: 517.95

Макалада Буссинеска-Ляванын теңдемеси үчүн биринчи түрдөгү чектик маселесинин чыгарылымдуулугу жөнүндөгү суроо каралат Галеркиндин ыкмасынын негизинде биринчи түрдөгү чектик маселесинин жалпыланган чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы тууралуу теорема далилденет.
***Негизги сөздөр:** Буссинеска-Ляванын теңдемеси, биринчи түрдөгү чектик маселе, жалпыланган чыгарылыш, Галеркиндин ыкмасы.*

В статье рассматривается разрешимость начально-краевой задачи для уравнения Буссинеска. На основе метода Галеркина доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения начально-краевой задачи.
***Ключевые слова:** уравнение Буссинеска – Лява, начально - краевая задача, обобщённое решение, метод Галеркина.*

We consider the solvability of the initial boundary value problem for the Boussinesq-Love equation. The theorems of existence and uniqueness of the solution of the problems are proved.
***Key words:** Boussinesq-Love equation, boundary value problem, generalized solution, method Galerkin.*

Введение. В работе изучается разрешимость начально-краевой задачи для уравнения Буссинеска - Лява

$$(Lu)(x,t) = u_{tt}(x,t) - \alpha\, u_{xxtt}(x,t) - \beta\, u_{xx}(x,t) = f(x,t).$$

Уравнение Буссинеска-Лява возникает при математическом моделировании длинных волн, при описании волн в плазме, при описании продольных колебаний в тонком упругом стержне (см. [1]). Разрешимость тех или иных краевых или начально-краевых задач для уравнения (1) изучались в [1–5]. Пусть $\Omega_T = \{(x,t) : x \in (0,l), t \in (0,T]\}$, $T > 0$ - фиксированное число.

2.Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим в области Ω_T первую начально-краевую задачу нахождения регулярного решения $u(x,t)$ из условий

$$Lu = u_{tt} - \alpha u_{xxtt} - \beta u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $\alpha > 0, \beta \ge 0$ - заданные положительные числа, а $f(x,t), u_0(x), u_1(x)$ - заданные функции, определенные в $[0,l]$, $\overline{\Omega}_T$ соответственно.

Умножим уравнение (1) на произвольную функцию $\varphi(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_T)$ и удовлетворяющую условию

$$\varphi(0,t)=\varphi(l,t)=\varphi(x,T)=0\ , \tag{4}$$

и проинтегрируем полученное равенство по области Ω_T.

Так как

$$u_{tt}(x,t)\varphi(x,t)=\left(u_t\varphi\right)_t-u_t\varphi_t=\left(u_t\varphi\right)_t-\left(u\varphi_t\right)_t+u\varphi_{tt},$$

$$\beta u_{xx}(x,t)\varphi(x,t)=\beta\left(u_x\varphi\right)_x-\beta\left(u\varphi_x\right)_x+\beta u\varphi_{xx},$$

$$\alpha u_{xxtt}(x,t)\varphi(x,t)=\alpha\left(u_{xtt}\varphi\right)_x-\alpha\left(u_{tt}\varphi_x\right)_x+\alpha u_{tt}\varphi_{xx}=$$

$$=\alpha\left(u_{xtt}\varphi\right)_x-\alpha\left(u_{tt}\varphi_x\right)_x+\alpha\left(u_t\varphi_{xx}\right)_t-\alpha\left(u\varphi_{xxt}\right)_t+\alpha u\varphi_{xxtt},$$

то, учитывая начальные условия (2), получим

$$\int\limits_{\Omega_T} u(x,t)[\varphi_{tt}(x,t)-\alpha\varphi_{xxtt}-\beta\varphi_{xx}]dxdt=\int\limits_0^l u_1(x)[\alpha\varphi_{xx}(x,0)-\varphi(x,0)]dx+$$
$$+\int\limits_0^l u_0(x)[\varphi_t(x,0)-\alpha\varphi_{txx}(x,0)]dx+\int\limits_{\Omega_T} f(x,t)\varphi(x,t)dxdt. \tag{5}$$

Определение. Функция $u(x,t)$ из класса $W_2^1(\Omega_T)$ называется обобщенным решением задачи (1)-(3), если она удовлетворяет начальному условию (2) и тождеству (5) при всех $\varphi(x,t)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_T)$, для которых выполнено условие (4).

Справедлива

Теорема. Пусть $u_0\in W_2^1(0,l)\cap W_2^2(0,l)$, $u_1\in W_2^1(0,l)$.Тогда для любой функции $f\in L_2(\Omega_T)$ существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3).

Доказательство теоремы разбивается на две части. В первой части устанавливаются энергетические оценки, во второй показывается, как эта неравенства используются для получения существования решения задачи (1)-(3).

а) Априорные оценки. Умножая обе части (1) скалярно на $u_t(x,t)$ в $L_2(0,l)$ получаем

$$\left\langle u_{tt}-\alpha u_{xxtt}-\beta u_{xx},u_t\,\cdot\right\rangle=\left\langle f,u_t\right\rangle, \tag{6}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - скалярное произведение в $L_2(0,l)$.

Так как

$$\left\langle u_{tt}(x,t),u_t(x,t)\right\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left\|u_t\right\|^2_{L_2(0,l)}\right],$$

$$-\left\langle \alpha u_{xxtt}(x,t)+\beta u_{xx}(x,t),u_t(x,t)\right\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha\left\|u_{xt}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\beta\left\|u_x\right\|^2_{L_2(0,l)}\right],$$

$$\left|\left\langle f,u_t\right\rangle\right|\le\varepsilon^{-1}\left\|f\right\|^2_{L_2(0,l)}+\varepsilon\left\|u_t\right\|^2_{L_2(0,l)},\varepsilon<\frac{1}{2},$$

то из равенства (6), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha\left\|u_{xt}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\beta\left\|u_x\right\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|u_t\right\|^2_{L_2(0,l)}\right]\le 2\left[\varepsilon^{-1}\left\|f\right\|^2_{L_2(0,l)}+\varepsilon\left\|u_t\right\|^2_{L_2(0,l)}\right].$$

Проинтегрировав последнее неравенство по $(0,t)$, получаем

$$\alpha\|u_{xt}\|^2_{L_2(0,l)}+\beta\|u_x\|^2_{L_2(0,l)}+\|u_t\|^2_{L_2(0,l)}\le\varepsilon\int_0^t\|u_t\|^2_{L_2(0,l)}(\tau)d\tau+$$

$$+\alpha\|u_1'\|^2_{L_2(0,l)}+\beta\|u_0'\|^2_{L_2(0,l)}+\|u_1\|^2_{L_2(0,l)}+2\varepsilon^{-1}\int_0^t\|f\|^2_{L_2(0,l)}(\tau)d\tau.$$

Из этого неравенства после применения лемму Гронуолла-Беллмана, будем иметь

$$\alpha\|u_{xt}\|^2_{L_2(0,l)}+\beta\|u_x\|^2_{L_2(0,l)}+\|u_t\|^2_{L_2(0,l)}\le C\left[\|u_0'\|^2_{L_2(0,l)}+\|u_1\|^2_{W_2^1(0,l)}+\|f\|^2_{L_2(0,l)}\right], \qquad (7)$$

и заметим, что из неравенства (7) вытекает единственность и непрерывная зависимость решения от данных задачи (1)-(3).

Аналогично, умножая уравнение (1) на $u_{tt}(x,t)$ и преобразовав интеграл $\langle u_{tt}-\alpha u_{xxtt}-\beta u_{xx},u_{tt}\cdot\rangle=\langle f,u_{tt}\rangle$, затем, применяя неравенства (7) и Юнга, получим оценку

$$\|u_{xtt}\|^2_{L_2(0,l)}+\|u_{tt}\|^2_{L_2(0,l)}\le C. \qquad (8)$$

б) Существование решения. Для доказательства существования решения используем полученные априорные оценки и метод Галеркина.

Возьмем в качестве фундаментальную систему функций $w_i(x),\ i=1,2,3,...,$ в $W_2^1(0,l)$ - собственные функции краевой задачи

$$-\frac{d^2w_j}{dx^2}=\lambda_j w_j\ ,x\in(0,l),\ w_j\ (0)=w_j\ (l)=0. \qquad (9)$$

Известно, что $w_j(x)\in W_2^2(0,l)$ и $\{w_j(x)\}$ ортонормированную систему в $L_2(0,l)$.

Приближенное решение $u_n(x,t)$ задачи (1)-(3) ищем в виде

$$u_n(x,t)=\sum_{i=1}^n u_{ni}(t)w_i(x),$$

где неизвестные $v_n(t)=\{u_{n1}(t),...,u_{nn}(t)\}$ определим из следующих условий

$$\langle u_{ntt}-\alpha u_{nxxtt}-\beta u_{nxx},w_j\cdot\rangle=\langle f,w_j\rangle, \qquad (10)$$

$$u_{nj}(0)=\langle u_0(x),w_j(x)\rangle,\ u_{nj}'(0)=\langle u_1(x),w_j(x)\rangle,\ \ i=1,2,3,...,n, \qquad (11)$$

Задача (10), (11) представляет собой задачи Коши для линейной систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функции $u_{ni}(t)$, $1\le i\le n$.

Известно, что задача (10),(11) имеет единственное непрерывное на $[0,T]$ решение любой правой части $f(x,t)\in L_2(\Omega_T)$.Таким образом, установлено существование и единственность решений $u_n(x,t)$ при любых $n=1,2,3,...,$, удовлетворяющих равенствам (9) и начальным условиям

$$u_n(x,0)=\sum_{i=1}^n\langle u_0(x),w_i(x)\rangle w_j(x),\ \ u_{nt}(x,0)=\sum_{i=1}^n\langle u_1(x),w_i(x)\rangle w_j(x).$$

Теперь нам нужно оценить норму

$$u_n(x,t)=\sum_{i=1}^{n}u_{ni}(t)w_i(x)$$

через данные задачи (1)-(3).

Для этого умножим j - е уравнение системы (8) на u_{njt} и просуммируем по j от 1 до *n.* Тогда получим

$$\left\langle u_{ntt}-\alpha u_{nxxtt}-\beta u_{nxx},u_{nt}\,\cdot\right\rangle=\left\langle f,u_{nt}\right\rangle \tag{12}$$

Из (12) с учетом оценки (7) при $u=u_n$, получим

$$\alpha\|u_{nxt}\|^2_{L_2(0,l)}+\beta\|u_{nx}\|^2_{L_2(0,l)}+(1-2\varepsilon)\|u_{nt}\|^2_{L_2(0,l)}\le C, \tag{13}$$

где через C обозначены различные постоянные, зависящее от исходных данных, но независящие от n. При этом учли, что

$$\|u_n(x,0)\|^2_{L_2(0,l)}=\sum_{i=1}^{n}\left(u_{ni}(0)\right)^2\le\|u_0(x)\|^2_{L_2(0,l)},$$

$$\|u_{nt}(x,0)\|^2_{L_2(0,l)}=\sum_{i=1}^{n}\left(u'_{ni}(0)\right)^2\le\|u_1(x)\|^2_{L_2(0,l)}.$$

Для получения оценки на u_{nxx}, u_{nxxt} умножим j - е уравнение системы (10) на $\lambda_j u_{njt}(t)$ и воспользуемся тем, что базисные функции $w_j(x)$ являются решением задачи (9). Тогда имеет место следующее равенство:

$$-\left\langle u_{ntt}-\alpha u_{nxxtt}-\beta u_{nxx},u_{nxxt}\,\cdot\right\rangle=-\left\langle f,u_{nxxt}\right\rangle.$$

Легко проверить, что

$$-\left\langle u_{ntt},u_{nxxt}\right\rangle=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_{nxt}\|^2_{L_2(0,l)}\right],\ \left\langle u_{nxx},u_{nxxt}\right\rangle=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_{nxx}\|^2_{L_2(0,l)}\right],$$

$$\left\langle u_{nxxtt},u_{nxxt}\right\rangle=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_{nxxt}\|^2_{L_2(0,l)}\right),\ \left|\left\langle f,u_{nxxt}\right\rangle\right|\le\varepsilon^{-1}\|f\|^2_{L_2(0,l)}+\varepsilon\|u_{nxxt}\|^2_{L_2(0,l)}.$$

Тогда, после интегрирования по $(0,t)$ приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\left[\beta\|u_{nxx}\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\|u_{nxxt}\|^2_{L_2(0,l)}+\|u_{nxt}\|^2_{L_2(0,l)}\right]\le C,$$

где через C обозначены различные постоянные, зависящее от начальных данных и правой части и не зависит от n.

Отсюда, имеем второе энергетическое неравенство

$$\|u_{nxt}\|^2_{L_2(0,l)}\le C\ \|u_{nxx}\|^2_{L_2(0,l)}\le C,\ \|u_{nxxt}\|^2_{L_2(0,l)}\le C. \tag{14}$$

Теперь умножим j -е уравнение системы на $\lambda_j u_{njtt}$ и еще раз воспользуемся тем, что базисные функции $w_j(x)$ являются решением задачи (9).Тогда после суммирования по j от *1* до *,* получим

$$-\left\langle u_{ntt}-\alpha u_{nxxtt}-\beta u_{nxx},u_{nxxtt}\,\cdot\right\rangle=-\left\langle f,u_{nxxtt}\right\rangle$$

Из этого равенства, после некоторых преобразований, получим

$$-\langle u_{ntt}, u_{nxxxt}\rangle = \|u_{nxxt}\|^2_{L_2(0,l)}, \ \langle u_{nxxtt}, u_{nxxtt}\rangle = \|u_{nxxtt}\|^2_{L_2(0,l)},$$

$$\langle u_{nxx}, u_{nxxtt}\rangle = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\|u_{nxx}\|^2_{L_2(0,l)}\right) + \|u_{nxxt}\|^2_{L_2(0,l)},$$

$$\left|\langle f, u_{nxxtt}\rangle\right| \le \varepsilon^{-1}\|f\|^2_{L_2(0,l)} + \varepsilon\|u_{nxxtt}\|^2_{L_2(0,l)}.$$

Отсюда с учетом оценки (14), имеем

$$\|u_{nxxtt}\|^2_{L_2(0,l)} \le C. \tag{15}$$

Для того, чтобы оценить производную u_{ntt}, рассмотрим интеграл

$$\langle u_{ntt} - \alpha u_{nxxtt} - \beta u_{nxx}, u_{ntt}\, \cdot\rangle = \langle f, u_{ntt}\rangle,$$

и применив оценку (8), получим

$$\|u_{ntt}\|^2_{L_2(0,l)} \le C. \tag{16}$$

Из оценок (14), (15), (16) вытекает, что $u_n(x,t)$, $u_{ntt}(x,t)$ принадлежит ограниченному множеству $L_2(\Omega_T)$, $L_2([0,T];W_2^1(0,l))$ соответственно и поэтому можно выбрать такую под последовательность $\{u_{nk}\}$ последовательности $\{u_n\}$, что

$u_{nk} \to u$ в $L_2(\Omega_T)$ слабо,

$$u_{nktt} \to \bar{u} \text{ в } L_2([0,T];W_2^1(0,l)) \text{ слабо.}$$

Тогда обязательно $\bar{u} = u_{tt}$.

Теперь, докажем, что построенная таким образом функция $u(x,t)$ является решением задачи (1)-(4).

С этой целью умножим равенство (9) на функцию $\varphi(t) \in C^2([0,T])$ удовлетворяющую условию $\varphi(T) = \varphi'(T) = 0$. Интегрируя по $[0,T]$ полученное равенство для $n \ge j$, получим

$$\int_0^T \left\langle u_{ntt} - \alpha u_{nxxtt} - \beta u_{nxx}, w_j(x)\varphi(t)\right\rangle dt = \int_0^T \left\langle f, w_j(x)\varphi(t)\right\rangle dt. \tag{17}$$

Из последнего равенства, производя интегрирование по частям, получим

$$\int_{\Omega_T} u_n[\varphi_{tt}(t)w_j(x) - (\alpha\varphi''(t) + \beta\varphi(t))w_j''(x)]dxdt = \int_0^l u_1(x)[\alpha\varphi(0)w_j''(x) - \varphi(0)w_j(x)]dx +$$

$$+\int_0^l u_0(x)[\varphi'(0)w_j(x) - \alpha\varphi'(0)w_j''(x)]dx + \int_{\Omega_T} f(x,t)\varphi(t)w_j(x)dxdt.$$

Так как $w_j(x)$ образуют базис в $W_2^2(0,l)$ и линейная оболочка функций вида $\varphi(t)w_j(x)$

всюду плотна $L_2([0,T];W_2^1(0,l))$, то, переходя к пределу в последнем равенстве при $n \to \infty$, получим

$$\int_{\Omega_T} u(x,t)[\varphi''(t)w_j(x) - \alpha\varphi''(t)w_j''(x) - \beta\varphi(t)w_j''(x)]dxdt = \int_0^l u_1(x)[\alpha\varphi(0)w_j''(x) - \varphi(0)w_j(x)]dx +$$

$$+\int_0^l u_0(x)[\varphi'(0)w_j(x) - \alpha\varphi'(0)w_j''(x)]dx + \int_{\Omega_T} f(x,t)\varphi(x,t)dxdt.$$

для любого $\varphi(x,t) = \varphi(t)w_j(x) \in L_2([0,T];\overset{0}{W}{}_2^1(0,l))$, т.е. $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1)-(3). Теорема доказана.

Литература:

1.Аблабеков Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики. - Бишкек, КГНУ, 1997.-184 с.

2.Алсыкова А.А. Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнения Буссинеска // Математические заметки СВФУ 2016. Том 23,
№ 1.С. 3-12.

3.Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн.- М.: Наука, 1990.-342 с.

4.Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.

5. Лионс Ж.-Л., Мадженс Е. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.:Мир, 1971.-371 с.

6. Замышляева А.А., Суровцев С.В. Нахождение численного решения задачи Коши-Дирихле методом конечных разностей // Вестник СамГУ. 2015. № 6(128), С.76-80.

Рецензент: д.ф.-м.н. Байзаков А.Б.