МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

Рустамова Д.К.

ГИПЕРБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЛОКАЛДУУ ЭМЕС ЧЕТТИК МАСЕЛЕНИН БОЛЖОЛДУУ ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Рустамова Д.К.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

D.K. Rustamova

THE APPROXIMATE SOLUTION OF NON-LOCAL REGIONAL TASK FOR THE HYPERBOLIC EQUATIONS

УДК: 517.944

Макалада гиперболалык теңдеме үчүн четтик маселе изилденет жана ал интегралдык теңдемелер системасына алынып келинет. Экинчи жана үчүнчү типтеги Вольтердик теңдемелер системасына торчо ыкма колдонулат. Маселенин болжолдуу чыгарылышы так чыгарылышына жыйналуусу далилденген.

Негизги сөздөр: *четтик маселе, интегралдык теңдеме, регуляризация, торчо ыкма.*

В работе рассматривается краевая задача для гиперболических уравнений, которая сводится к системе интегральных уравнений. Применяется метод сеток для систем интегральных уравнений Вольтерра второго и третьего рода. Доказана сходимость и приближенного решения к точному решению задачи.

Ключевые слова: *краевая задача, интегральное уравнение, регуляризация, метод сеток.*

In work the regional task for the hyperbolic equations which comes down to the system of the integrated equations is considered. The method of grids is applied to the systems of the integrated equations of Volterra of the second and third sort. It is proved convergence and the approximate solution to the exact solution of a task.

Key words: *regional task, integrated equations, regularization, method of grids.*

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t \partial x} = P(x,t)w(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

с условиями

$$w(0,t) = \sigma(t) + \varphi_0, \tag{2}$$

$$A(x)w(x,0) + C(x)w(x,T) = q(x). \tag{3}$$

Известные функции удовлетворяют условиям:

а) $A(x), C(x) \in C^2[0,b],\ q(x) \in C^1[0,b],\ p(x) \equiv A(x) + C(x) -$ неубывающая функция, $p(0) = 0,\ p(x) > 0,\ \forall x \in (0,b]$;

б) $P(x,t),\ f(x,t) \in C(D),\ \ \sigma(t) \in C^1[0,T],\ \ \sigma(0) = 0,\ \ C(0)\sigma(T) = q(0),$

$D = \{(x,t)/\, 0 < x < b,\, 0 < t < T\},\ \ \varphi_0 -$ неизвестный постоянный;

в) $G(x) \equiv C_0 p(x) + K(x,x) \geq d_1 > 0,\ K(x,s) \equiv C(x) P_0(s),\ P_0(s) = \int_0^T P(s,\tau)d\tau,$

$0 \leq s \leq x,\ d_1 = const.$

Задача (1)-(3) сводится к системе интегральных уравнений [4]

$$\begin{cases} w(x,t) = \varphi(x) + \int_0^t z(x,y)dy, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \\ z(x,t) = \sigma'(t) + \int_0^x P(s,t)\varphi(s)ds + \int_0^x P(s,t)\int_0^t z(s,y)dyds + \int_0^x f(s,t)ds, \\ p(x)\varphi(x) + \int_0^x G(s)\varphi(s)ds = \int_0^x [K(s,s) - K(x,s)]\varphi(s)ds - C_0\int_0^x\int_s^x K(\nu,s)d\nu\varphi(s)ds - \\ -\int_0^x K(s,s)(1 + C_0(x-s))\int_0^T z(s,y)dyds + Q(x). \end{cases} \quad (4)$$

где

$$Q(x) = \int_0^x\int_0^T C(s)f(s,t)dtds + C_0\int_0^x (x-s)\int_0^T C(s)f(s,t)dtds - g(x),\ g(x) = \mu(x) + C_0\int_0^x \mu(s)ds.$$

Регуляризация систем интегральных уравнений (4) построим в следующем виде [4]

$$\begin{cases} w_\varepsilon(x,t) = \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t z_\varepsilon(x,y)dy, \\ z_\varepsilon(x,t) = \sigma'(t) + \int_0^x P(s,t)\varphi_\varepsilon(s)ds + \int_0^x P(s,t)\int_0^t z_\varepsilon(s,y)dyds + \int_0^x f(s,t)ds, \\ (\varepsilon + p(x))\varphi_\varepsilon(x) + \int_0^x G(s)\varphi_\varepsilon(s)ds = \int_0^x [K(s,s) - K(x,s)]\varphi_\varepsilon(s)ds - C_0\int_0^x\int_s^x K(\nu,s)d\nu\varphi_\varepsilon(s)ds - \\ -\int_0^x K(s,s)(1 + C_0(x-s))\int_0^T z_\varepsilon(s,y)dyds + \varepsilon\varphi(0) + Q(x), \end{cases} \quad (5)$$

где ε малый параметр из интервала $(0,1)$.

Третье уравнение системы (5), используя резольвенту ядра $\left(-\dfrac{G(\xi)}{\varepsilon + p(x)}\right)$, можно переписать в виде интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Тогда систему (5) представим в виде

$$
\begin{cases}
w_\varepsilon(x,t) = \varphi_\varepsilon(x) + \int_0^t z_\varepsilon(x,y)dy, \\
z_\varepsilon(x,t) = \sigma'(t) + \int_0^x P(s,t)\varphi_\varepsilon(s)ds + \int_0^x P(s,t)\int_0^t z_\varepsilon(s,y)dyds + \int_0^x f(s,t)ds, \\
\varphi_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)}\int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)}d\xi\right)\frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)}\left\{\int_0^s [K(s,s) - K(s,\xi)]\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi - \right. \\
- C_0\int_0^s\int_\xi^s K(\xi,\nu)d\nu\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi - \int_0^x [K(s,s) - K(s,\xi)]\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi + C_0\int_0^x\int_\xi^x K(\xi,\nu)d\nu\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi + \\
+ \int_0^x K(\xi,\xi)(1 + C_0(x-\xi))\int_0^T z_\varepsilon(\xi,y)dyd\xi - \int_0^s K(\xi,\xi)(1 + C_0(s-\xi))\int_0^T z_\varepsilon(\xi,y)dyd\xi + \qquad (6) \\
\left. + Q(s) - Q(x)\right\}ds - \frac{1}{\varepsilon + p(x)}\exp\left(-\int_0^x \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)}d\xi\right)\left\{\int_0^x [K(s,s) - K(s,\xi)]\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi - \right. \\
\left. - C_0\int_0^x\int_\xi^x K(\xi,\nu)d\nu\varphi_\varepsilon(\xi)d\xi - \int_0^x K(s,s)(1 + C_0(x-s))\int_0^T z_\varepsilon(s,y)dyds + \varepsilon\varphi(0) + Q(x)\right\}.
\end{cases}
$$

Численное решение обратной задачи для уравнения Эйлера-Дарбу приведя к системе интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с невозрастающей функцией вне интеграла исследовано в работе [3]. Обоснование метода сеток для интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с неубывающей функцией вне интеграла приведено в работе [4]. Некоторые результаты данной работы используется в данном исследовании.

На отрезке $[0,b]$ и $[0,T]$ введем равномерные сетки $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0..n, b = nh\}$, $\omega_\tau = \{t_k = k\tau, k = 0..l, T = m\tau\}$ n,m - натуральные числа. Пространство сеточных функций $z_i = z(x_i, t_j)$ $(x_i, t_j) \in \omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ обозначим через $C_{h,\tau}$ с нормой

$$\left\| z_i^j \right\|_{C_{h,\tau}} = \max_{\substack{0\le i\le n \\ 0\le j\le m}} \left| z_i^j \right|,$$

пространство сеточных функций $\varphi_i = \varphi(x_i)$ обозначим через C_h с нормой $\left\|\varphi_i\right\|_{C_h} = \max_{0\le i\le n}\left|\varphi_i\right|$.

Применяя квадратурную формулу правых прямоугольников для интегралов в (6), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} w_{\varepsilon,i}^{j} = \varphi_{\varepsilon,i} + h\sum_{s=1}^{j} z_{\varepsilon,i}^{j}, \\ z_{\varepsilon,i}^{j} = \sigma^{'j} + h\sum_{k=1}^{i} P_k^j \varphi_{\varepsilon,k} + h\sum_{k=1}^{i} P_k^j \tau \sum_{s=1}^{j} z_{\varepsilon,k}^{s} + h\sum_{k=1}^{i} f_{k,j}, \\ \varphi_{\varepsilon,i} = -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h\sum_{k=1}^{i} \exp\left(-h\sum_{l=k+1}^{i} \frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right) \frac{G_k}{\varepsilon + p_k} \left[h\sum_{l=1}^{k} [K_{k,k} - K_{k,l}]\varphi_{\varepsilon,l} - C_0 h\sum_{l=1}^{k} h\sum_{s=l+1}^{k} K_{s,l}\varphi_{\varepsilon,l} - \right. \\ - h\sum_{l=1}^{i} [K_{k,k} - K_{k,l}]\varphi_{\varepsilon,l} + C_0 h\sum_{l=1}^{i} h\sum_{s=l+1}^{i} K_{s,l}\varphi_{\varepsilon,l} + h\sum_{l=1}^{i} K_{l,l}\left(1 + C_0\left(x_i - x_l\right)\right)\tau\sum_{j=1}^{m} z_{\varepsilon,l}^{j} + \\ \left. - h\sum_{l=1}^{k} K_{l,l}\left(1 + C_0\left(s_k - x_l\right)\right)\tau\sum_{j=1}^{m} z_{\varepsilon,l}^{i} + Q_k^m - Q_i^m \right\} + \frac{1}{\varepsilon + p_i}\exp\left(-h\sum_{l=1}^{i}\frac{G_l}{\varepsilon + p_l}\right)\left[h\sum_{l=1}^{i} [K_{k,k} - \right. \\ \left. - K_{k,l}]\varphi_{\varepsilon,l} - C_0 h\sum_{l=1}^{i} h\sum_{s=l+1}^{i} K_{s,l}\varphi_{\varepsilon,l} - h\sum_{l=1}^{i} K_{l,l}\left(1 + C_0\left(x_i - x_l\right)\right)\tau\sum_{j=1}^{m} z_{\varepsilon,l}^{i} + \varepsilon\varphi_{h,0} + Q_i^m \right\}, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$Q_i^m = g_i - h\sum_{k=1}^{i} \tau \sum_{j=1}^{m} C_k f_k^j - C_0 h\sum_{k=1}^{i} \left(x_i - x_k\right)\tau\sum_{j=1}^{m} C_k f_i^j, \quad g_i = \mu_i + C_0 h\sum_{k=1}^{i} \mu_k.$$

Величину $\varphi_{0,h}$ выбираем в виде $\varphi_{0,h} = \frac{Q_1}{p_1 + hG_1}$, для которой из условия *а- в* следуют оценки

$$\left|\varphi_{0,h}\right| = \left|\frac{Q(x_1) - Q(x_0)}{p(x_1) + hG(x_1)}\right| \le \left|\frac{Q(x_1) - Q(x_0)}{p(x_1) - p(x_0) + hG(x_1)}\right| \le \frac{h\left\|Q'(x)\right\|_{C[0,b]}}{h\left|p'(x) + G(x)\right|} \le \frac{\left\|Q'(x)\right\|_{C[0,b]}}{\min\left|G(x)\right|} \le \frac{N_1}{d_1},$$

$$\left|\varphi_{0,h} - \varphi_0\right| \le hN_2,$$

где $N_1 = \max_{x\in[0,b]}\left|Q'(x)\right|,\ N_2 = \left\|\varphi'(x)\right\|_{C[0,b]} + \frac{d_4}{2d_1}$,

$$d_4 = \left\|\varphi(x)\right\|_{C[0,b]}\left\|G'(x)\right\|_{C[0,b]} + \left\|G(x)\right\|_{C[0,b]}\left\|\varphi'(x)\right\|_{C[0,b]}.$$

Обозначим $q = M_4 + \left\|P(x,t)\right\|_{C(D)} bT_0$, где $q = M_4 + \left\|P(x,t)\right\|_{C(D)} bT_0$.

Теорема. При выполнении условий *а-в*, $q < 1$ и $\varepsilon = O(h^{\alpha})$, $0 < \alpha \le 1/2$, решение системы (7) при $h \to 0$, $\tau \to 0$ равномерно сходится к точному решению системы (6), причем имеет место оценка

$$\left|w_{\varepsilon,i}^{j} - w_i^j\right| \le M_1\tau + \left(1 - q\right)^{-1}\left[M_2 h + M_3\tau + M_5 h^{\alpha} + N_2 h + M_6 h + M_7\tau + M_8\frac{h}{\varepsilon} + M_9\frac{h^2}{\varepsilon}\right].$$

Доказательство.

Введем вектор погрешности

$$\eta_{\varepsilon,i}^{h} = \varphi_{\varepsilon}(x_i) - \varphi(x_i) = \varphi_{\varepsilon,i} - \varphi_i, \quad i = 1..n,$$

$$\mu_{\varepsilon,i}^{j} = z_{\varepsilon}\left(x_i, t_j\right) - z\left(x_i, t_j\right) = z_{\varepsilon,i}^{j} - z_i^j,\ j = 1..m_0. \quad (8)$$

Тогда из (7) получим

$$\begin{cases} w_{\varepsilon,i}^{j} - w_{i}^{j} = \eta_{\varepsilon,l}^{h} + \tau\sum_{m=1}^{m_0}\mu_{\varepsilon,i}^{m} + R_{i,j}^{*}, \\ \mu_{\varepsilon,i}^{j} = h\sum_{k=1}^{i}P_k^j\eta_{\varepsilon,k} + h\sum_{k=1}^{i}P_k^j\tau\sum_{m=1}^{m_0}\mu_{\varepsilon,k}^{m} - R_{i,j}^{0}, \\ \eta_{\varepsilon,i} = -\dfrac{1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{k=1}^{i-1}\exp\left(-h\sum_{l=k+1}^{i}\dfrac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)\dfrac{G_k}{\varepsilon+p_k}\left[h\sum_{l=1}^{k-1}[K_{l,l}-K_{k,l}]\eta_{\varepsilon,l}^{h} - C_0h\sum_{l=1}^{k-1}h\sum_{s=l+1}^{k}K_{s,l}\eta_{\varepsilon,l}^{h} - \right. \\ -h\sum_{l=1}^{i-1}[K_{l,l}-K_{i,l}]\eta_{\varepsilon,l}^{h} + C_0h\sum_{l=1}^{i-1}h\sum_{s=l+1}^{i}K_{s,l}\eta_{\varepsilon,l}^{h} + h\sum_{l=1}^{i-1}K_{l,l}\left(1+C_0\left(x_i-x_l\right)\right)\tau\sum_{m=1}^{m_0}\mu_{\varepsilon,l}^{m} - \\ \left.-h\sum_{l=1}^{k-1}K_{l,l}\left(1+C_0\left(x_k-x_l\right)\right)\tau\sum_{m=1}^{m_0}\mu_{\varepsilon,l}^{m} + \varepsilon\left(\varphi(x_l)-\varphi(x_i)\right)\right\} + \dfrac{1}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{l=1}^{i}\dfrac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)\times \\ \times\left[h\sum_{l=1}^{i-1}[K_{l,l}-K_{i,l}]\eta_{\varepsilon,l}^{h} - C_0h\sum_{l=1}^{i-1}h\sum_{s=l+1}^{i}K_{s,l}\eta_{\varepsilon,l}^{h} - h\sum_{l=1}^{i-1}K_{l,l}\left(1+C_0\left(x_i-x_l\right)\right)\tau\sum_{m=1}^{m_0}\mu_{\varepsilon,l}^{m} + \varepsilon\left(\varphi_i-\varphi_0\right)\right\} + \\ + \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{l=1}^{i}\dfrac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)\left(\varphi_0-\varphi_{h,0}\right) - R_i^1. \end{cases} \tag{9}$$

Произведя оценки из (9) получим

$$\left|w_{\varepsilon,i}^{j}-w_{i}^{j}\right| \le \left|\varphi_{\varepsilon,i}-\varphi_i\right| + h\sum_{m=1}^{m_0}\left|z_{\varepsilon,i}^{m}-z_{i}^{m}\right| + \left|R_{i,j}^{*}\right| \le \left\|\eta_{\varepsilon,i}\right\|_{C_h} + T\left\|\mu_{\varepsilon,i}^{m}\right\|_{C_{h,\tau}} + \left|\int_0^{t_j}z(x_i,\nu)d\nu - \tau\sum_{m=1}^{m_0}z_i^s\right| \le$$

$$\le \left\|\eta_{\varepsilon,i}\right\|_{C_h} + T\left\|\mu_{\varepsilon,i}^{m}\right\|_{C_{h,\tau}} + \left|\sum_{s=1}^{j}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left[z(x_i,\nu)-z(x_i,t_s)\right]d\nu\right| \le \left\|\eta_{\varepsilon,i}\right\|_{C_h} + T\left\|\mu_{\varepsilon,i}^{m}\right\|_{C_{h,\tau}} + \left\|z_t'(x,t)\right\|_{C(D)}\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{j}\int_{t_{s-1}}^{t_s}(t_s-\nu)d\nu \le \left\|\eta_{\varepsilon,i}\right\|_{C_h} + T\left\|\mu_{\varepsilon,i}^{m}\right\|_{C_{h,\tau}} + \frac{T}{2}\left\|z_t'(x,t)\right\|_{C(D)}\tau \le \left\|\eta_{\varepsilon,i}\right\|_{C_h} + T\left\|\mu_{\varepsilon,i}^{m}\right\|_{C_{h,\tau}} + M_1\tau,$$

где $R_{i,j}^{*} = \int_0^{t_j}z(x_i,\nu)d\nu - \tau\sum_{s=1}^{j}z_i^s$, $M_1 = \frac{T}{2}\left\|z_t'(x,t)\right\|_{C(D)}$.

$$\left|z_{\varepsilon,i}^{j}-z_{i}^{j}\right| = \left|h\sum_{k=1}^{i}P_k^j\eta_{\varepsilon,k}^{h} + h\sum_{k=1}^{i}P_k^j\tau\sum_{m=1}^{m_0}\mu_{\varepsilon,k}^{s} - R_{i,j}^{0}\right| \le \left\|P(x,t)\right\|_{C(D)}h\sum_{k=1}^{i}\left\|\eta_{\varepsilon,k}^{h}\right\|_{C_h} + \left\|P(x,t)\right\|_{C(D)}\times$$

$$\times h\sum_{k=1}^{i}\tau\sum_{m=1}^{m_0}\left\|\mu_{\varepsilon,k}^{m}\right\|_{C_{h,\tau}} + \left|R_{i,j}^{0}\right| \le T_0\left(\left\|\eta_{\varepsilon,k}^{h}\right\|_{C_h} + \left\|\mu_{\varepsilon,k}^{m}\right\|_{C_{h,\tau}}\right) + \left|\int_0^{x_i}P(s,t_j)\varphi(s)ds - h\sum_{k=1}^{i}P(x_k,t_j)\varphi_k\right| +$$

$$+\left|\int_0^{x_i}P(s,t_j)\int_0^{t_j}z(x_k,y)dyds - h\sum_{k=1}^{i}P_k^j\tau\sum_{m=1}^{m_0}z_k^m\right| + \left|\int_0^{x_i}f(s,t_j)ds - h\sum_{k=1}^{i}f_k^j\right| \le T_0\left(\left\|\eta_{\varepsilon,k}^{h}\right\|_{C_h} + \left\|\mu_{\varepsilon,k}^{m}\right\|_{C_{h,\tau}}\right) +$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{i}\int_{x_{k-1}}^{x_k}P(s,t_j)\left[\varphi(s)-\varphi(x_k)\right]ds\right| + \left|\sum_{k=1}^{i}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[P(s,t_j)-P(x_k,t_j)\right]\varphi(x_k)ds\right| +$$

$$+\left|\int_0^{x_i} P(s,t_j)[\int_0^{t_j} z(x_k,y)dy-\tau\sum_{m=1}^{m_0} z_k^m]ds\right|+\left|\sum_{k=1}^{i}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[P(x_k,t_j)-P(s,t_j)]\tau\sum_{m=1}^{m_0} z_k^m ds\right|+$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{i}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(s,t_j)-f(x_k,t_j)]ds\right|\le T_0\left(\left\|\eta_{\varepsilon,k}^h\right\|_{C_h}+\left\|\mu_{\varepsilon,k}^m\right\|_{C_{h,\tau}}\right)+\frac{b}{2}\|P(x,t)\|_{C(D)}\|\varphi'(x)\|_{C[0,b]}h+$$

$$+\frac{b}{2}\|P'(x,t)\|_{C(D)}\|\varphi(x)\|_{C[0,b]}h+\frac{T}{2}b\|P(x,t)\|_{C(D)}\|z'(x,t)\|_{C(D)}\tau+\frac{T}{2}b\|P'(x,t)\|_{C(D)}\|z(x,t)\|_{C(D)}h+$$

$$+\frac{b}{2}\|f'(x,t)\|_{C(D)}h\le T_0\left(\left\|\eta_{\varepsilon,k}^h\right\|_{C_h}+\left\|\mu_{\varepsilon,k}^m\right\|_{C_{h,\tau}}\right)+M_2h+M_3\tau,$$

где $R_{i,j}^0=\int_0^x P(s,t_j)\varphi(s)ds-h\sum_{k=1}^{i}P_k^j\varphi_k+\int_0^x P(s,t_j)\int_0^t z(s,y)dyds-h\sum_{k=1}^{i}P_k^j\tau\sum_{m=1}^{m_0}z_k^m+$

$$+\int_0^{x_i} f(s,t_j)ds-h\sum_{k=1}^{i}f_k^j,\quad T_0=\max\left(b\|P(x,t)\|_{C(D)},bT\|P(x,t)\|_{C(D)}\right),$$

$$M_2=\frac{b}{2}\|P(x,t)\|_{C(D)}\|\varphi'(x)\|_{C[0,b]}+\frac{b}{2}\|P'(x,t)\|_{C(D)}\|\varphi(x)\|_{C[0,b]}+\frac{T}{2}b\|P'(x,t)\|_{C(D)}\|z(x,t)\|_{C(D)}+$$

$$+\frac{b}{2}\|f'(x,t)\|_{C(D)},\quad M_3=\frac{T}{2}b\|P(x,t)\|_{C(D)}\|z'(x,t)\|_{C(D)}.$$

$$\left|\varphi_{\varepsilon,i}-\varphi_i\right|=\left|-\frac{1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{k=1}^{i-1}\exp\left(-h\sum_{l=k+1}^{i}\frac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\left[h\sum_{l=1}^{k-1}[K_{l,l}-K_{k,l}]\eta_{\varepsilon,l}^h-C_0h\sum_{l=1}^{k-1}h\sum_{s=l+1}^{k}K_{s,l}\times\right.\right.$$

$$\times\eta_{\varepsilon,l}^h-h\sum_{l=1}^{i-1}[K_{l,l}-K_{i,l}]\eta_{\varepsilon,l}^h+C_0h\sum_{l=1}^{i-1}h\sum_{s=l+1}^{i}K_{s,l}\eta_{\varepsilon,l}^h+h\sum_{l=1}^{i-1}K_{l,l}(1+C_0(x_i-x_l))\tau\sum_{m=1}^{m_0}\mu_{\varepsilon,l}^m-h\sum_{l=1}^{k-1}K_{l,l}\times$$

$$\left.\times(1+C_0(x_k-x_l))\tau\sum_{m=1}^{m_0}\mu_{\varepsilon,l}^m+\varepsilon(\varphi(x_l)-\varphi(x_i))\right\}+\frac{1}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{l=1}^{i}\frac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)\left[h\sum_{l=1}^{i-1}[K_{l,l}-K_{i,l}]\times\right.$$

$$\left.\times\eta_{\varepsilon,l}^h-C_0h\sum_{l=1}^{i-1}h\sum_{s=l+1}^{i}K_{s,l}\eta_{\varepsilon,l}^h-h\sum_{l=1}^{i-1}K_{l,l}(1+C_0(x_i-x_l))\tau\sum_{m=1}^{m_0}\mu_{\varepsilon,l}^m+\varepsilon(\varphi_i-\varphi_{h,0})\right\}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_i}\times$$

$$\left.\times\exp\left(-h\sum_{l=1}^{i}\frac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)(\varphi_0-\varphi_{h,0})-R_i^1\right|\le d_1d_4\sum_{k=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{l=k+1}^{i}\frac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)\frac{(x_i-x_k)}{\varepsilon+p_i}\frac{h}{\varepsilon+p_k}\times$$

$$\times\left[2T_2h\sum_{l=1}^{k}\left\|\eta_{\varepsilon,l}^h\right\|_{C_h}+(1+2bC_0)\|K_{l,l}\|_{C_{h,\tau}}\tau\sum_{m=1}^{m_0}\left\|\mu_{\varepsilon,l}^m\right\|_{C_{h,\tau}}\right]ds+\frac{(x_i-x_0)}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{l=1}^{i}\frac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)\times$$

$$\times\left[T_2h\sum_{l=1}^{k}\left\|\eta_{\varepsilon,l}^h\right\|_{C_h}+(1+C_0b)\|K_{l,l}\|_{C_{h,\tau}}\tau\sum_{m=1}^{m_0}\left\|\mu_{\varepsilon,l}^m\right\|_{C_{h,\tau}}\right]+\left|\varepsilon\left(H_\varepsilon^h[\varphi_i]\right)\right|+\left|\varphi_0-\varphi_{h,0}\right|+\left|R_i^1\right|\le$$

$$\le\frac{d_4}{d_1}\sum_{k=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{l=k+1}^{i}\frac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)\left(h\sum_{l=k+1}^{i}\frac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)\left[2T_2h\sum_{l=1}^{k}\left\|\eta_{\varepsilon,l}^h\right\|_{C_h}+(1+2C_0b)\|K_{l,l}\|_{C_{h,\tau}}\tau\sum_{m=1}^{m_0}\left\|\mu_{\varepsilon,l}^m\right\|_{C_{h,\tau}}\right]\times$$

$$+d_1^{-1}\left(h\sum_{l=1}^{i}\frac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)\exp\left(-h\sum_{l=1}^{i}\frac{G_l}{\varepsilon+p_l}\right)\left[T_2h\sum_{l=1}^{k}\left\|\eta_{\varepsilon,l}^h\right\|_{C_h}+(1+C_0b)\|K_{l,l}\|_{C_{h,\tau}}\tau\sum_{m=1}^{m_0}\left\|\mu_{\varepsilon,l}^m\right\|_{C_{h,\tau}}\right]+$$

$$+\left|\varepsilon\left(H_\varepsilon^h[\varphi_i]\right)\right|+hN_2+\left|R_i^1\right|\le\frac{d_4d_5}{d_1}\left[2T_2h\sum_{l=1}^{k}\left\|\eta_{\varepsilon,l}^h\right\|_{C_h}+\left(1+C_0b\right)\left\|K_{l,l}\right\|_{C_{h,\tau}}\tau\sum_{m=1}^{m_0}\left\|\mu_{\varepsilon,l}^m\right\|_{C_{h,\tau}}\right]+$$

$$+d_1^{-1}e^{-1}\left[T_2h\sum_{l=1}^{k}\left\|\eta_{\varepsilon,l}^h\right\|_{C_h}+\left(1+C_0b\right)\left\|K_{l,l}\right\|_{C_{h,\tau}}\tau\sum_{m=1}^{m_0}\left\|\mu_{\varepsilon,l}^m\right\|_{C_{h,\tau}}\right]+\varepsilon\left|H_\varepsilon^h[\varphi_i]\right|+hN_2+\left|R_i^1\right|\le$$

$$\le d_1^{-1}\left(d_4d_5+e^{-1}\right)T_2h\sum_{l=1}^{k}\left\|\eta_{\varepsilon,l}^h\right\|_{C_h}+d_1^{-1}\left[d_4d_5\left(1+2bC_0\right)+e^{-1}\left(1+bC_0\right)\right]\left\|K_{l,l}\right\|_{C_{h,\tau}}\tau\sum_{m=1}^{m_0}\left\|\mu_{\varepsilon,l}^m\right\|_{C_{h,\tau}}+$$

$$+\varepsilon\left|H_\varepsilon^h[\varphi_i]\right|+hN_2+\left|R_i^1\right|\le T_{12}\left\|\eta_{\varepsilon,l}^h\right\|_{C_h}+T_{13}\left\|\mu_{\varepsilon,l}^m\right\|_{C_{h,\tau}}+\varepsilon\left|H_\varepsilon^h[\varphi_i]\right|+\left|R_i^1\right|\le M_5\left(\left\|\eta_{\varepsilon,l}^h\right\|_{C_h}+\left\|\mu_{\varepsilon,l}^m\right\|_{C_{h,\tau}}\right)+$$

$$+h^\alpha M_4+hN_2+\left|R_i^1\right|,$$

где $M_4=\max\left(T_{12},T_{13}\right)$, $T_{12}=d_1^{-1}\left(d_4d_5+e^{-1}\right)T_2b$,

$$T_{13}=d_1^{-1}T\left[d_4d_5\left(1+2bC_0\right)+e^{-1}\left(1+C_0b\right)\right]\left\|K(x,x)\right\|_{C[0,b]},\quad T_2=T_1+C_0T_0,$$

$$T_0=\max_D\left|K(x,\xi)\right|,\ T_1=\max_D\left|K'_x(x,\xi)\right|,\ d_5=Sup\left|\sum_{l=1}^{i}e^{-\nu}\nu\right|,\ \nu=h\sum_{l=k+1}^{i}\frac{G_l}{\varepsilon+p_l},$$

$$H_\varepsilon^h[\varphi_i]=-\frac{1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{j=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{m=j}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}[\varphi_j-\varphi_i]+\frac{1}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{m=1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)[\varphi_i-\varphi_0].$$

R_i^1- остаточные члены интегралов, причем для $H_\varepsilon^h[\varphi_i]$ имеют место оценки [3,4]

$$\left|R_i^1\right|\le M_6h+M_7\tau+M_8\frac{h}{\varepsilon}+M_9\frac{h^2}{\varepsilon},\quad \left|H_\varepsilon^h[\varphi_i]\right|\le M_5,\quad M_5=d_1^{-1}\left(d_4d_5+e^{-1}\right)\left\|\varphi_i\right\|_{C_h}.$$

Отсюда получим

$$\begin{cases}\left|w_{\varepsilon,i}^j-w_i^j\right|\le\left\|\eta_{\varepsilon,i}^h\right\|_{C_h}+b\left\|\mu_{\varepsilon,i}^m\right\|_{C_{h,\tau}},\\ \left\|\mu_{\varepsilon,k}^m\right\|_{C_{h,\tau}}\le\left\|P(x,t)\right\|_{C(D)}bT_0\left(\left\|\eta_{\varepsilon,i}^h\right\|_{C_h}+\left\|\mu_{\varepsilon,i}^m\right\|_{C_{h,\tau}}\right)+M_2h+M_3\tau,\\ \left\|\eta_{\varepsilon,i}^h\right\|_{C_h}\le M_4\left(\left\|\eta_{\varepsilon,i}^h\right\|_{C_h}+\left\|\mu_{\varepsilon,l}^m\right\|_{C_{h,\tau}}\right)+M_5h^\alpha+N_2h+M_6h+M_7\tau+M_8\frac{h}{\varepsilon}+M_9\frac{h^2}{\varepsilon}.\end{cases}\tag{10}$$

Суммируя имеем

$$\left\|\eta_{\varepsilon,i}^h\right\|_{C_h}+\left\|\mu_{\varepsilon,l}^m\right\|_{C_{h,\tau}}\le\left(1-q\right)^{-1}\left[M_2h+M_3\tau+M_5h^\alpha+N_2h+M_6h+M_7\tau+M_8\frac{h}{\varepsilon}+M_9\frac{h^2}{\varepsilon}\right].$$

Следовательно, учитывая условие $q<1$ и подстановки (8), из (10), (11) приходим к оценке теоремы, что и требовалось доказать.

Литература:

1. Глушак А.В. Численное решение линейной обратной задачи для уравнения Эйлера-Дарбу. ЖВМ и МФ. 2006. - Т.46. - С. 848-857.
2. Каракеев Т.Т., Рустамова Д.К., Бугубаева Ж.Т. Приближенные методы решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. Наука и образование. - Прага, 2014. - С. 6-10.
3. Каракеев Т.Т., Рустамова Д.К. Метод квадратурных формул для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. Проблемы современной науки и образования №3(45). - Москва, 2016. - С. 7-11.
4. Каракеев Т.Т., Рустамова Д.К. Единственность и устойчивость решения нелокальной краевой задачи для линейных уравнений в частных производных второго порядка. Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. - Астана, 2014. №4. - С.64-72.

Рецензент: д.ф.-м.н. Чечейбаев Б.