Исаев А.Д.

БЕССЕЛЬ МЕНЕН АБЕЛЬДИН I-II ТИБИНДЕГИ ТҮЗ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИ

Исаев А.Д.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ И АБЕЛЯ I-II РОДОВ

A.D. Isaev

NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS BESSEL AND ABEL I-II BIRTH

УДК: 517.968.74

Макалада Бессель менен Абельдин I-II типтеринде түз сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу үчүн жаңы ыкма каралат.

Негизги сөздөр: *Бессель, Абель, дифференциалдык теңдемелер, ыкма.*

В статье рассматривается новый метод для решения нелинейных дифференциальных уравнений Бесселя и Абеля I-II родов.

Ключевые слова: уравнения *Бессель, Абель, дифференциальные уравнения, метод.*

The article discusses a new method for solving nonlinear differential equations of Bessel and Abel I-II delivery.

Key words: *Bessel, Abel, a differential equation, method.*

I. Введение. Апробация метода применённого в работах $[2,3,4,5]$ для решения уравнений видов Бесселя и Абеля. Сравнение графиков решений уравнений на Mathcad 11.

II. 1 Дифференциальное уравнение Бесселя вида $t^2 \cdot \dfrac{d^2X(t)}{dt^2} + t \cdot \dfrac{dX(t)}{dt} + \left(t^2 - \nu^2\right) \cdot X(t) = 0$.

$где \quad \nu - параметр\ ,порядок\ \ уравнения\ .$

Сделаем общеизвестные преобразования поделив на

$$t \neq 0 \;\Rightarrow\; t \cdot \frac{d^2X(t)}{dt^2} + \frac{dX(t)}{dt} + \left(t - \frac{\nu^2}{t}\right) \cdot X(t) = 0 \quad или \quad \frac{d\left[t \cdot \dfrac{dX(t)}{dt}\right]}{dt} + \left(t - \frac{\nu^2}{t}\right) \cdot X(t) = 0 \qquad (II.1.1)$$

Последнее, называется уравнением Бесселя в самосопряженном (дивергентном) виде.

Используем подстановку $X(t) = \dfrac{Z(t)}{\sqrt{t}} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^2Z(t)}{dt^2} + \left(1 - \dfrac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right) \cdot Z(t) = 0 \qquad (II.1.2)$

Далее метод **подстановки Алмаз Бея**

$$Z(t) = e^{G(t)} = e^{W_0(t)+S(t)+x(t)} = e^{W_0(t)} \cdot e^{S(t)+x(t)}$$

$$e^{G(t)} \cdot \left[\frac{d^2G(t)}{dt^2} + \left(\frac{dG(t)}{dt}\right)^2\right] + e^{G(t)} \cdot \left[1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right] = 0 \qquad (II.1.3)$$

$$\underbrace{\frac{d^2W_0(t)}{dt^2}+\left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)^2+1}_{0}+\frac{d^2\big(S(t)+x(t)\big)}{dt^2}+2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}\cdot\frac{d\big(S(t)+x(t)\big)}{dt}+\left(\frac{d\big(S(t)+x(t)\big)}{dt}\right)^2-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}=0$$

$$\frac{d^2W_0(t)}{dt^2}+\left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)^2+1=0\quad\Rightarrow\quad\frac{dW_0(t)}{dt}=tg\big(C_t-t\big);\ W_0(t)=\ln\left|C_{W_0}\cdot\cos\big(C_t-t\big)\right|;\ e^{W_0(t)}=C_{W_0}\cdot\cos\big(C_t-t\big)$$

$$C_t=\frac{\pi}{4};\ C_{W_0}=\sqrt{2}$$

$$\frac{d\big(S(t)+x(t)\big)}{dt}=e^{W(t)}\quad\Rightarrow\quad\frac{de^{W(t)}}{dt}+2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}\cdot e^{W(t)}+e^{2\cdot W(t)}-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}=0$$

$$\sin\theta(t)^*=-\int\left(2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}+1-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}\right)dt+C_\theta$$

$$W(t)^*=Arth\big(\sin\theta(t)^*\big)\quad\text{либо}\quad W(t)^*=\sum_{n=1}^{N}\frac{\big(\sin\theta(t)^*\big)^{2\cdot n+1}}{2\cdot n+1}+C_W$$

$$D=\left(2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}+\frac{dW(t)}{dt}\right)^2+4\cdot1\cdot\left(\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}\right)$$

$$e_{1,2}^{W(t)}=\frac{-\left(2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}+\frac{dW(t)}{dt}\right)\pm\sqrt{\left(2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}+\frac{dW(t)}{dt}\right)^2+4\cdot1\cdot\left(\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{t^2}\right)}}{2}$$

$$\big(S(t)+x(t)\big)_{1,2}=\int e_{1,2}^{W(t)}\cdot dt+C_{S+x}\ \Rightarrow\ Z(t)=C_{W_0}\cdot\cos(C_t-t)\cdot e^{\left(S(t)+x(t)\right)_{1,2}}=C_{W_0}\cdot\cos(C_t-t)\cdot e^{\int e_{1,2}^{W(t)}dt+C_{S+x}}$$

$$X(t)=\frac{Z(t)}{\sqrt{t}}=\frac{C_{W_0}\cdot\cos(C_t-t)}{\sqrt{t}}\cdot e^{\int e_{1,2}^{W(t)}dt+C_{S+x}}\qquad(II.1.4)$$

$$X_B(t)=C_1\cdot J_n(m,t)+C_2\cdot Y_n(m,t)$$

где C_1, C_2 *– произвольные постоянные, а* $J_n(m,t), Y_n(m,t)$ *– специальные функции Бесселя.*

Общие решения уравнения Бесселя

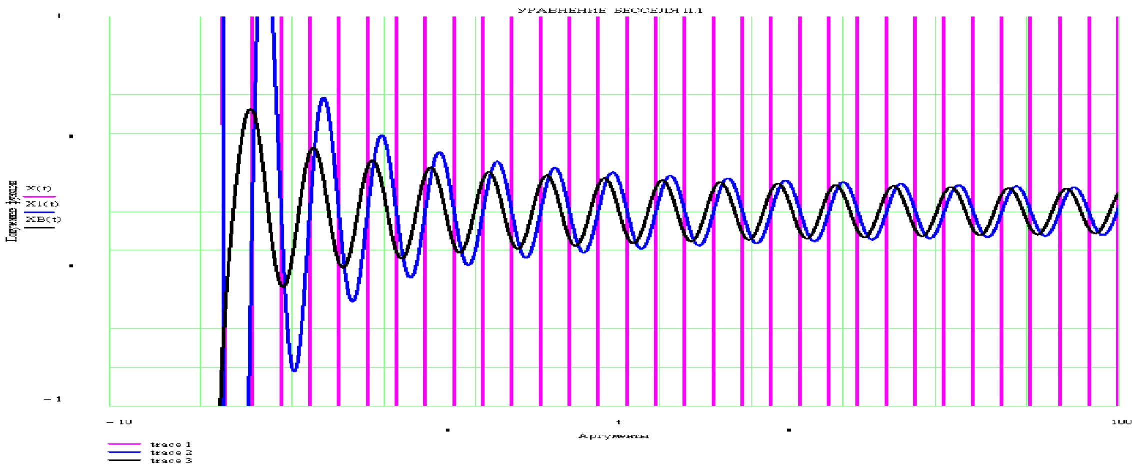

Рис. II. 1.1. $\nu = 3$, $n = 3$, $n = m$

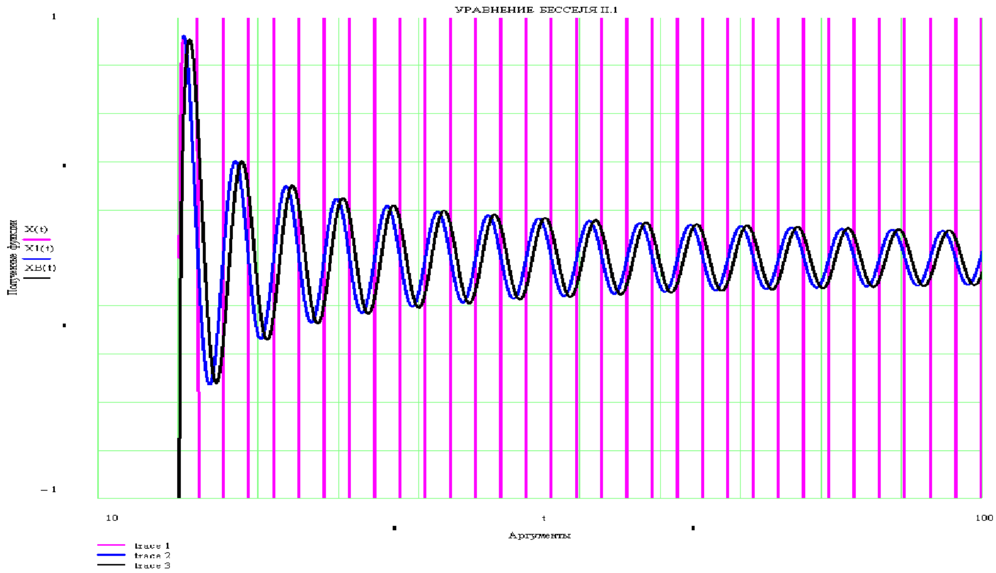

Рис. II. 1.2. $\nu = 0$, $n = 0$, $n = m$

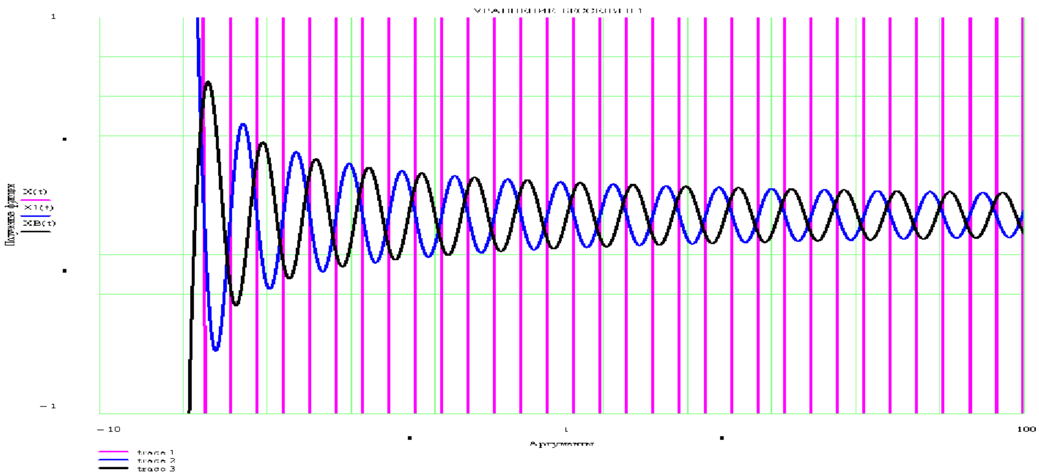

Рис. II. 1.3. $\nu = 1$, $n = 1$, $n = m$

II. 2. Дифференциальное уравнение вида $t^2 \cdot \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + t \cdot \frac{dX(t)}{dt} - (t^2 - \nu^2) \cdot X(t) = 0$.

Поступим аналогично $X(t)=\frac{Z(t)}{\sqrt{t}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2Z(t)}{dt^2}+\left(\frac{\nu^2+\frac{1}{4}}{t^2}-1\right)\cdot Z(t)=0 \qquad (II.2.1)$

$$Z(t)=e^{G(t)}=e^{W_0(t)+S(t)+x(t)}=e^{W_0(t)}\cdot e^{S(t)+x(t)}$$

$$e^{G(t)}\cdot\left[\frac{d^2G(t)}{dt^2}+\left(\frac{dG(t)}{dt}\right)^2\right]+e^{G(t)}\cdot\left[\frac{\nu^2+\frac{1}{4}}{t^2}-1\right]=0 \qquad (II.2.2)$$

$$\underbrace{\frac{d^2W_0(t)}{dt^2}+\left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)^2-1}_{0}+\frac{d^2\big(S(t)+x(t)\big)}{dt^2}+2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}\cdot\frac{d\big(S(t)+x(t)\big)}{dt}+\left(\frac{d\big(S(t)+x(t)\big)}{dt}\right)^2+\frac{\nu^2+\frac{1}{4}}{t^2}=0$$

$$\frac{d^2W_0(t)}{dt^2}+\left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2W_0(t)}{dt^2}=1-\left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)^2; \qquad \frac{d\left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)}{1-\left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)^2}=dt$$

$$\frac{d\left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)}{\left(1-\frac{dW_0(t)}{dt}\right)\cdot\left(1+\frac{dW_0(t)}{dt}\right)}=dt; \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{d\left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)}{\left(1-\frac{dW_0(t)}{dt}\right)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{d\left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)}{\left(1+\frac{dW_0(t)}{dt}\right)}=dt$$

$$\ln\left|\frac{1+\frac{dW_0(t)}{dt}}{1-\frac{dW_0(t)}{dt}}\right|^{\frac{1}{2}}=t+C_t \quad \Rightarrow \quad \frac{dW_0(t)}{dt}=\frac{e^{2\cdot(t+C_t)}-1}{e^{2\cdot(t+C_t)}+1}; \quad sh(t+C_t)=\frac{e^{t+C_t}-\frac{1}{e^{t+C_t}}}{2}; \quad ch(t+C_t)=\frac{e^{t+C_t}+\frac{1}{e^{t+C_t}}}{2}$$

$$\frac{dW_0(t)}{dt}=\frac{sh(t+C_t)}{ch(t+C_t)} \quad \Rightarrow \quad W_0(t)=\ln\left|C_{W_0}\cdot ch(t+C_t)\right|; \qquad e^{W_0(t)}=C_{W_0}\cdot ch\big(t+C_t\big)$$

$$C_t=\frac{\pi}{4}; \quad C_{W_0}=\sqrt{2}$$

$$\frac{d^2\big(S(t)+x(t)\big)}{dt^2}+2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}\cdot\frac{d\big(S(t)+x(t)\big)}{dt}+\left(\frac{d\big(S(t)+x(t)\big)}{dt}\right)^2+\frac{\nu^2+\frac{1}{4}}{t^2}=0$$

$$\frac{de^{W(t)}}{dt}+2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}\cdot e^{W(t)}+e^{2\cdot W(t)}+\frac{\nu^2+\frac{1}{4}}{t^2}=0$$

$$\sin\theta(t)^*=-\int\left(2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}+1+\frac{\nu^2+\frac{1}{4}}{t^2}\right)dt+C_\theta$$

$$W(t)^{*} = Arth\left(\sin\theta(t)^{*}\right) \quad \textit{либо} \quad W(t)^{*} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\left(\sin\theta(t)^{*}\right)^{2\cdot n+1}}{2\cdot n+1} + C_W$$

$$D = \left(2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt} + \frac{dW(t)}{dt}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot\left(\frac{\nu^2+\frac{1}{4}}{t^2}\right)$$

$$e_{1,2}^{W(t)} = \frac{-\left(2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt} + \frac{dW(t)}{dt}\right) \pm \sqrt{\left(2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt} + \frac{dW(t)}{dt}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot\left(\frac{\nu^2+\frac{1}{4}}{t^2}\right)}}{2}$$

$$\left(S(t)+x(t)\right)_{1,2} = \int e_{1,2}^{W(t)}\cdot dt + C_{S+x} \Rightarrow Z(t) = C_{W_0}\cdot ch(t+C_t)\cdot e^{\left(S(t)+x(t)\right)_{1,2}} = C_{W_0}\cdot ch(t+C_t)\cdot e^{\int e_{1,2}^{W(t)}dt + C_{S+x}}$$

$$X(t) = \frac{Z(t)}{\sqrt{t}} = \frac{C_{W_0}\cdot ch(t+C_t)}{\sqrt{t}}\cdot e^{\int e_{1,2}^{W(t)}dt + C_{S+x}} \qquad (II.2.3)$$

$$X_B(t) = C_1\cdot J_n(m,t) + C_2\cdot Y_n(m,t)$$

Общие решения уравнения

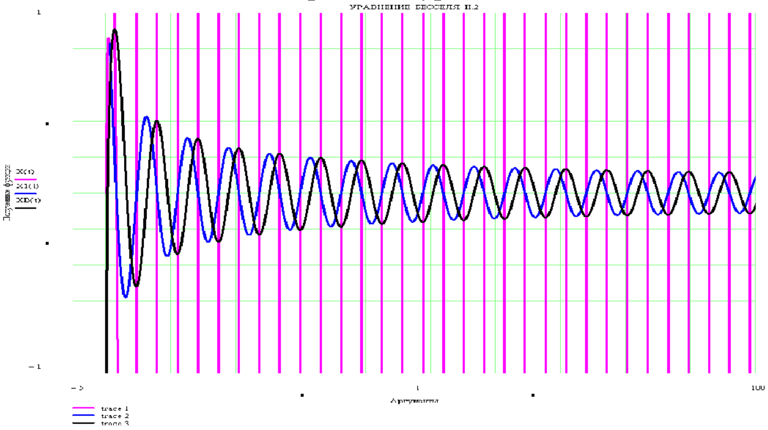

Рис. II. 2.1. $\nu = 0,\ n = 0,\ n = m$

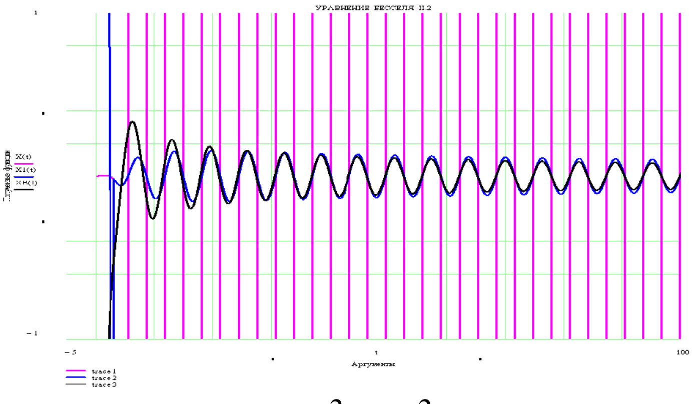

Рис. II. 2.2 $\nu = 3,\ n = 3,\ n = m$

II. 3. Дифференциальное уравнение вида $t^2 \cdot \frac{d^2X(t)}{dt^2} + t \cdot \frac{dX(t)}{dt} + \left(a^2 \cdot t^2 - \nu^2\right) \cdot X(t) = 0$.

Через подстановку $X(t) = \frac{Z(t)}{\sqrt{t}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \left(a^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \right) \cdot Z(t) = 0 \qquad (II.3.1)$

$$\underbrace{\frac{d^2W_0(t)}{dt^2} + \left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)^2 + a^2}_{0} + \frac{d^2\left(S(t)+x(t)\right)}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dW_0(t)}{dt} \cdot \frac{d\left(S(t)+x(t)\right)}{dt} + \left(\frac{d\left(S(t)+x(t)\right)}{dt}\right)^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} = 0$$

$$\frac{d^2W_0(t)}{dt^2} + \left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)^2 + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dW_0(t)}{dt} = \frac{1}{a} \cdot tg\left(a \cdot C_t - a \cdot t\right); \; W_0(t) = \ln\left|C_{W_0} \cdot \cos\left(a \cdot C_t - a \cdot t\right)\right|;$$

$$e^{W_0(t)} = C_{W_0} \cdot \cos\left(a \cdot C_t - a \cdot t\right) \qquad C_t = \frac{\pi}{4}; \; C_{W_0} = \sqrt{2}$$

$\omega_0 = a$ *частота собственных колебаний.*

Аналогично к предыдущим выкладкам

$$\frac{d^2\left(S(t)+x(t)\right)}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dW_0(t)}{dt} \cdot \frac{d\left(S(t)+x(t)\right)}{dt} + \left(\frac{d\left(S(t)+x(t)\right)}{dt}\right)^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} = 0$$

$$\frac{d\left(S(t)+x(t)\right)}{dt} = e^{W(t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{de^{W(t)}}{dt} + 2 \cdot \frac{dW_0(t)}{dt} \cdot e^{W(t)} + e^{2 \cdot W(t)} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} = 0$$

$$\sin\theta(t)^* = -\int \left(2 \cdot \frac{dW_0(t)}{dt} + 1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \right) dt + C_\theta$$

$$W(t)^* = Arth\left(\sin\theta(t)^*\right) \quad \text{либо} \quad W(t)^* = \sum_{n=1}^{N} \frac{\left(\sin\theta(t)^*\right)^{2 \cdot n+1}}{2 \cdot n + 1} + C_W$$

$$D = \left(2 \cdot \frac{dW_0(t)}{dt} + \frac{dW(t)}{dt} \right)^2 + 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \right)$$

$$e_{1,2}^{W(t)} = \frac{-\left(2 \cdot \frac{dW_0(t)}{dt} + \frac{dW(t)}{dt} \right) \pm \sqrt{\left(2 \cdot \frac{dW_0(t)}{dt} + \frac{dW(t)}{dt} \right)^2 + 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \right)}}{2}$$

$$\left(S(t)+x(t)\right)_{1,2} = \int e_{1,2}^{W(t)} \cdot dt + C_{S+x} \Rightarrow Z(t) = C_{W_0} \cdot \cos(a \cdot C_t - a \cdot t) \cdot e^{\left(S(t)+x(t)\right)_{1,2}} = C_{W_0} \cdot \cos(a \cdot C_t - a \cdot t) \cdot e^{\int e_{1,2}^{W(t)} dt + C_{S+x}}$$

$$X(t) = \frac{Z(t)}{\sqrt{t}} = \frac{C_{W_0} \cdot \cos(a \cdot C_t - a \cdot t)}{\sqrt{t}} \cdot e^{\int e_{1,2}^{W(t)} dt + C_{S+x}} \qquad (II.3.2)$$

$$X_B(t) = C_1 \cdot J_n(m, a \cdot t) + C_2 \cdot Y_n(m, a \cdot t)$$

Общие решения уравнения

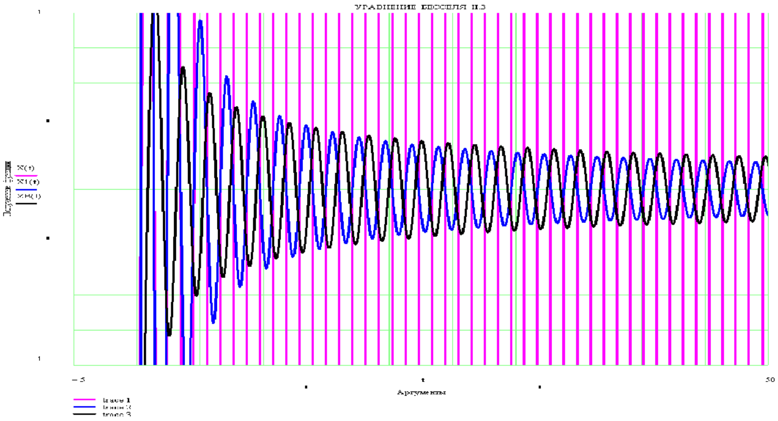

Рис. II. 3.1 $\nu = 2,\ n = 2,\ n = m,\ a = 3$

II. 4. Дифференциальное уравнение вида $t^2 \cdot \frac{d^2X(t)}{dt^2} + a \cdot t \cdot \frac{dX(t)}{dt} + (t^2 - \nu^2) \cdot X(t) = 0$

С помощью подстановки $X(t) = t^{\frac{1-a}{2}} \cdot Y(t)$

Тоже сводится к уравнению Бесселя $t^2 \cdot \frac{d^2Y(t)}{dt^2} + t \cdot \frac{dY(t)}{dt} + (t^2 - n^2) \cdot Y(t) = 0 \qquad (II.4.1)$

где $n^2 = \nu^2 + \frac{1}{4} \cdot (a-1)^2$

Далее $Y(t) = \frac{Z(t)}{\sqrt{t}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right) \cdot Z(t) = 0$

$$Z(t) = e^{G(t)} = e^{W_0(t) + S(t) + x(t)} = e^{W_0(t)} \cdot e^{S(t) + x(t)}$$

$$e^{G(t)} \cdot \left[\frac{d^2G(t)}{dt^2} + \left(\frac{dG(t)}{dt}\right)^2\right] + e^{G(t)} \cdot \left[1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right] = 0$$

$$\underbrace{\frac{d^2W_0(t)}{dt^2} + \left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)^2 + 1}_{0} + \frac{d^2(S(t) + x(t))}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dW_0(t)}{dt} \cdot \frac{d(S(t) + x(t))}{dt} + \left(\frac{d(S(t) + x(t))}{dt}\right)^2 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{t^2} = 0$$

$$\frac{d^2W_0(t)}{dt^2} + \left(\frac{dW_0(t)}{dt}\right)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dW_0(t)}{dt} = tg(C_t - t);\ W_0(t) = \ln\left|C_{W_0} \cdot \cos(C_t - t)\right|;\ e^{W_0(t)} = C_{W_0} \cdot \cos(C_t - t)$$

$$C_t = \frac{\pi}{4};\ C_{W_0} = \sqrt{2}$$

$$\frac{d\left(S(t)+x(t)\right)}{dt}=e^{W(t)}\ \Rightarrow\ \frac{de^{W(t)}}{dt}+2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}\cdot e^{W(t)}+e^{2\cdot W(t)}-\frac{n^2-\frac{1}{4}}{t^2}=0$$

$$\sin\ \theta(t)^*=-\int\left(2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}+1-\frac{n^2-\frac{1}{4}}{t^2}\right)dt+C_\theta$$

$$W(t)^*=Arth\left(\sin\ \theta(t)^*\right)\quad \text{либо}\quad W(t)^*=\sum_{k=1}^{K}\frac{\left(\sin\ \theta(t)^*\right)^{2\cdot k+1}}{2\cdot k+1}+C_{W^*}$$

$$D=\left(2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}+\frac{dW(t)}{dt}\right)^2+4\cdot 1\cdot\left(\frac{n^2-\frac{1}{4}}{t^2}\right)$$

$$e_{1,2}^{W(t)}=\frac{-\left(2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}+\frac{dW(t)}{dt}\right)\pm\sqrt{\left(2\cdot\frac{dW_0(t)}{dt}+\frac{dW(t)}{dt}\right)^2+4\cdot 1\cdot\left(\frac{n^2-\frac{1}{4}}{t^2}\right)}}{2}$$

$$\left(S(t)+x(t)\right)_{1,2}=\int e_{1,2}^{W(t)}\cdot dt+C_{S+x}\ \Rightarrow\ Z(t)=C_{W_0}\cdot\cos(C_t-t)\cdot e^{\left(S(t)+x(t)\right)_{1,2}}=C_{W_0}\cdot\cos(C_t-t)\cdot e^{\int e_{1,2}^{W(t)}dt+C_{S+x}}$$

$$X(t)=\frac{t^{\frac{1-a}{2}}}{\sqrt{t}}\cdot C_{W_0}\cdot\cos(C_t-t)\cdot e^{\int e_{1,2}^{W(t)}dt+C_{S+x}}\qquad (II.4.2)$$

$$X_B(t)=t^{\frac{1-a}{2}}\cdot\left[C_1\cdot J_n(m,t)+C_2\cdot Y_n(m,t)\right]$$

Общие решения уравнения

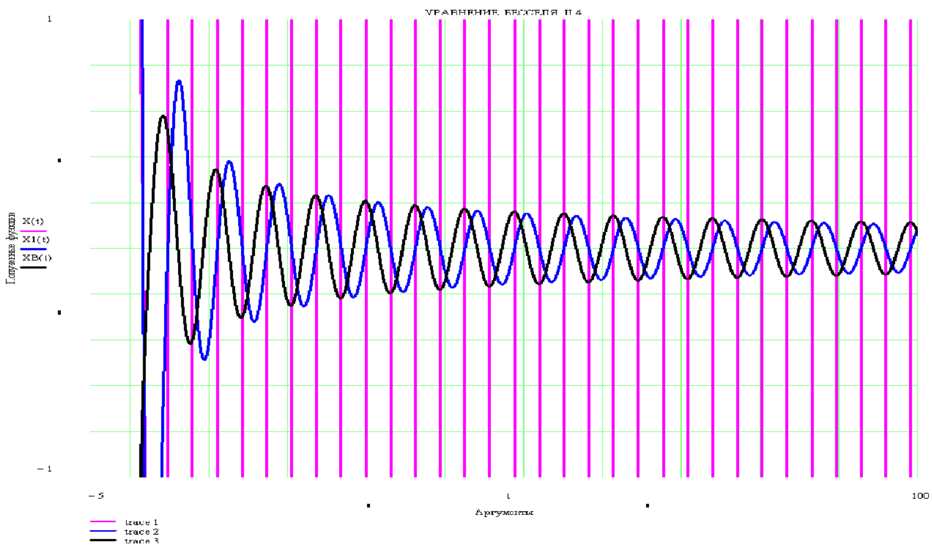

Рис. II. 3.1. $\nu=2,\ a=1, n=2\ ,\ \ m=n$

Напомним, что $n=\sqrt{\nu^2+\frac{1}{4}\cdot(a-1)^2}=\sqrt{4+\frac{1}{4}\cdot(1-1)^2}=2$

III. 1. Дифференциальное уравнение Абеля I рода.

$$\frac{dX(t)}{dt} = f_0(t) + f_1(t)\cdot X(t) + f_2(t)\cdot X^2(t) + f_3\cdot X(t)^3 \qquad (III.1.1)$$

$$X(t) = e^{W(t)} \;\Rightarrow\; e^{W(t)}\cdot\frac{dW(t)}{dt} = f_0(t) + f_1(t)\cdot e^{W(t)} + f_2(t)\cdot e^{2\cdot W(t)} + f_3(t)\cdot e^{3\cdot W(t)}$$

где $f_0(t);\ f_1(t);\ f_2(t);\ f_3(t)$ *– переменные или постоянные коэффициенты уравнения.*

$$\frac{d\sin\theta^*(t)}{dt} = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + f_3(t); \qquad \sin\theta^*(t) = \int\left(f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)\right)dt + C_\theta$$

$$W^*(t) = Arth\left(\sin\theta^*(t)\right) \quad \text{либо} \quad W^*(t) = \sum_{n=1}^{N}\frac{\left(\sin\theta^*(t)\right)^{2\cdot n+1}}{2\cdot n+1} + C_W$$

$$\underbrace{f_0(t)}_{d(t)} + \underbrace{\left(f_1(t) - \frac{dW(t)}{dt}\right)}_{c(t)}\cdot e^{W(t)} + \underbrace{f_2(t)}_{b(t)}\cdot e^{2\cdot W(t)} + \underbrace{f_3(t)}_{a(t)}\cdot e^{3\cdot W(t)} = 0$$

$$q(t) = \frac{2\cdot b^3(t) - 9\cdot a(t)\cdot b(t)\cdot c(t) + 27\cdot a^2(t)\cdot d(t)}{27\cdot a^3(t)} \qquad p(t) = \frac{3\cdot a(t)\cdot c(t) - b^2(t)}{3\cdot a^2(t)}$$

Ряд подстановок Виета $\quad X(t) = Y(t) - \dfrac{b(t)}{3\cdot a(t)} \;\Rightarrow\; Y^3(t) + p(t)\cdot Y(t) + q(t) = 0$

$$Y(t) = Z(t) - \frac{p(t)}{3\cdot Z(t)} \;\Rightarrow\; Z^6(t) + q(t)\cdot Z^3(t) - \frac{p^3(t)}{27} = 0\ ; \qquad Z(t) = \sqrt[3]{T(t)} \;\Rightarrow\; T^2(t) + q(t)\cdot T(t) - \frac{p^3(t)}{27} = 0$$

$$D_T(t) = q^2 + \frac{4\cdot p^3(t)}{27}\ ; \quad T_{1,2}(t) = \frac{-q(t) \pm \sqrt{q^2(t) + \frac{4\cdot p^3(t)}{27}}}{2}\ ; \quad Z_{1,2}(t) = \sqrt[3]{T_{1,2}(t)}\ ;$$

$$Y_{1,2}(t) = Z_{1,2}(t) - \frac{p(t)}{3\cdot Z_{1,2}(t)} = \sqrt[3]{\frac{-q(t) \pm \sqrt{q^2(t) + \frac{4\cdot p^3(t)}{27}}}{2}} - \frac{p(t)}{3\cdot\sqrt[3]{\frac{-q(t) \pm \sqrt{q^2(t) + \frac{4\cdot p^3(t)}{27}}}{2}}}$$

$$X_{1,2}(t) = Y_{1,2}(t) - \frac{b(t)}{3\cdot a(t)} \;\Rightarrow\; X_{1,2}(t) = \sqrt[3]{\frac{-q(t) \pm \sqrt{q^2(t) + \frac{4\cdot p^3(t)}{27}}}{2}} - \frac{p(t)}{3\cdot\sqrt[3]{\frac{-q(t) \pm \sqrt{q^2(t) + \frac{4\cdot p^3(t)}{27}}}{2}}} - \frac{b(t)}{3\cdot a(t)} \qquad (III.1.2)$$

Общие решения уравнения Абеля I рода.

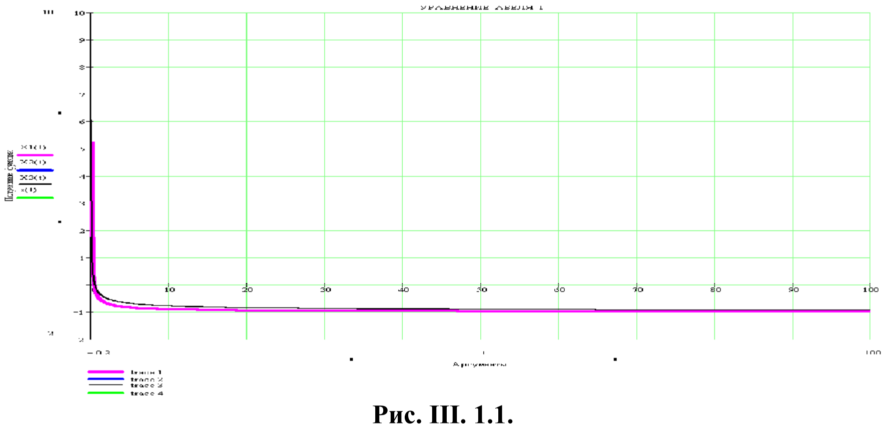

Рис. III. 1.1.

III. 2. Дифференциальное уравнение Абеля II рода.

$$\left[g_0(t)+g_1(t)\cdot X(t)\right]\cdot\frac{dX(t)}{dt}=f_0(t)+f_1(t)\cdot X(t)+f_3(t)\cdot X^2(t)+f_3(t)\cdot X^3(t) \qquad (III.2.1)$$

$$X(t)=e^{W(t)}\ \Rightarrow\ g_0(t)\cdot X(t)\cdot\frac{dW(t)}{dt}+g_1(t)\cdot X^2(t)\cdot\frac{dW(t)}{dt}=f_0(t)+f_1(t)\cdot X(t)+f_2(t)\cdot X^2(t)+f_3(t)\cdot X^3(t)$$

$$g(t)_0\cdot X(t)\cdot\frac{dW(t)}{dt}+g_1(t)\cdot X^2(t)\cdot\frac{dW(t)}{dt}=f_0(t)+f_1(t)\cdot X(t)+f_2(t)\cdot X^2(t)+f_3(t)\cdot X^3(t)$$

$$\frac{d\sin\theta^*(t)}{dt}=\frac{f_0(t)+f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)}{g_0(t)+g_1(t)}\quad\Rightarrow\quad\sin\theta^*(t)=\int\frac{f_0(t)+f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)}{g_0(t)+g_1(t)}dt+C_\theta$$

$$W^*(t)=Arth\left(\sin\theta^*(t)\right)\quad \text{либо}\quad W^*(t)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\left(\sin\theta^*(t)\right)^{2\cdot n+1}}{2\cdot n+1}+C_W$$

$$\underbrace{f_0(t)}_{d(t)}+\underbrace{\left(f_1(t)-g_0(t)\cdot\frac{dW(t)}{dt}\right)}_{c(t)}\cdot X(t)+\underbrace{\left(f_2(t)-g_1(t)\cdot\frac{dW(t)}{dt}\right)}_{b(t)}\cdot X^2(t)+\underbrace{f_3(t)}_{a(t)}\cdot X^3(t)=0$$

$$q(t)=\frac{2\cdot b^3(t)-9\cdot a(t)\cdot b(t)\cdot c(t)+27\cdot a^2(t)\cdot d(t)}{27\cdot a^3(t)}\qquad p(t)=\frac{3\cdot a(t)\cdot c(t)-b^2(t)}{3\cdot a^2(t)}$$

Ряд подстановок Виета $X(t)=Y(t)-\frac{b(t)}{3\cdot a(t)}\quad\Rightarrow\quad Y^3(t)+p(t)\cdot Y(t)+q(t)=0$

$$Y(t)=Z(t)-\frac{p(t)}{3\cdot Z(t)}\ \Rightarrow\ Z^6(t)+q(t)\cdot Z^3(t)-\frac{p^3(t)}{27}=0\ ;\qquad Z(t)=\sqrt[3]{T(t)}\ \Rightarrow\ T^2(t)+q(t)\cdot T(t)-\frac{p^3(t)}{27}=0$$

$$D_T(t)=q^2(t)+\frac{4\cdot p^3(t)}{27}\ ;\quad T_{1,2}(t)=\frac{-q(t)\pm\sqrt{q^2(t)+\frac{4\cdot p^3(t)}{27}}}{2}\ ;\quad Z_{1,2}(t)=\sqrt[3]{T_{1,2}(t)}\ ;$$

$$Y_{1,2}(t)=Z_{1,2}(t)-\frac{p(t)}{3\cdot Z_{1,2}(t)}=\sqrt[3]{\frac{-q(t)\pm\sqrt{q^2(t)+\frac{4\cdot p^3(t)}{27}}}{2}}-\frac{p(t)}{3\cdot\sqrt[3]{\frac{-q(t)\pm\sqrt{q^2(t)+\frac{4\cdot p^3(t)}{27}}}{2}}}$$

$$X_{1,2}(t)=Y_{1,2}(t)-\frac{b(t)}{3\cdot a(t)}\ \Rightarrow\ X_{1,2}(t)=\sqrt[3]{\frac{-q(t)\pm\sqrt{q^2(t)+\frac{4\cdot p^3(t)}{27}}}{2}}-\frac{p(t)}{3\cdot\sqrt[3]{\frac{-q(t)\pm\sqrt{q^2(t)+\frac{4\cdot p^3(t)}{27}}}{2}}}-\frac{b(t)}{3\cdot a(t)}\quad (III.2.2)$$

Общие решения уравнения Абеля II рода.

IV. Вывод. С учётом, что подбор коэффициентов и постоянных интегрирования осуществляется произвольно, графики решений показывают удовлетворительные результаты, полученные с использованием нового метода.

Литература:

1. Исаев А.Д. Задача о поперечном нелинейном изгибе. Журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», №4. - Бишкек, 2015. - С. 28-50.
2. Исаев А.Д. Нелинейный поперечный изгиб, интеграл вероятности и уравнение Риккати. Журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», №5. - Бишкек, 2016. - С. 20-36.
3. Исаев А.Д. Об одном общем решении уравнения Риккати. Журнал «Вестник КГПУ им. Арабаева», №2. - Бишкек-Екатеринбург, 2017. - С. 306-312.
4. Исаев А.Д. Об одном общем методе решения нелинейных дифференциальных уравнений. Журнал «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана», №10. - Бишкек 2016. - С. 3-13.
5. Исаев А.Д. Уравнение Риккати и метод Алмаз Бея. Журнал «Известия вузов Кыргызстана», №6. - Бишкек, 2017. - С. 15-22.
6. Двайт Г.Б. Таблица интегралов. Журнал «Наука». - Москва, 1973. - С.150-160.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Журнал «Наука». - Москва, 1971. - С. 576.
8. Кудрявцев Е.М. Полное руководство по русской версии Mathcad 11. - Москва: «ДМК пресс», 2005. - С. 591.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Омуралиев А.С.