МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

Байманкулов А.Т., Жуаспаев Т.А., Акмолдина А.И.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОНИЦАЕМОСТИ СЛОЯ

A.T. Baimankulov, T.A. Zhuaspayev, A.I. Akmoldina

REVERSE PROBLEM OF LAYER PENETRATION COEFFICIENT

УДК: 519.62:624.131

В работе рассматривается проблема определения коэффициента проницаемости пласта при упругом режиме добычи нефти с помощью математического и компьютерного моделирования.

Ключевые слова: *коэффициент проницаемости, обратная задача, сопряженная задача, начально-граничные условия.*

The work considers the problem of defining penetration coefficient of a layer during the oil volumetric expansion drive with the help of mathematical and computer modeling.

Key words: *penetration coefficient, reverse problem, conjugate problem, initial-boundary conditions.*

Исследование технологических характеристик залегания осадочных и метаморфических горных пород имеет большое значение для нефтегазовой отрасли. Одними из важных параметров характеризующих свойства пласта являются коэффициенты пьезопроводности и проницаемости. Существуют различные формулы определения коэффициента пьезопроводности и проницаемости пласта, но точности этих формул зачастую не соответствуют требованиям практики. Поэтому разработка новых более точных методов определения технологических характеристик месторождения является актуальной задачей.

Проблемами решения обратных задач нефтедобычи занимались Баренблатт [1], Карслоу, Егер [2], Маскет [3], Либеретта и т.д. В работах перечисленных исследователей используя уравнение пьезопроводности при различных допущениях находятся решения прямой задачи. И затем из решения прямой задачи выводятся определенные формулы для определения коэффициента пьезопроводности, проницаемости и т.д.

Поскольку уравнение пьезопроводности не решается в общем виде, полученные результаты сильно расходятся от исходных данных.

Определение коэффициента проницаемости слоя численными методами является востребованной задачей.

Постановка задачи

В области $Q=(\rho,R_1)\cup(R_1,R)\times(0,T)$ рассматривается задача

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1\partial}{r\partial r}\left(\frac{k}{\mu_\kappa\beta}r\frac{\partial P}{\partial r}\right), \tag{1}$$

$$k\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)\bigg|_{r=\rho}=-\frac{\mu_\kappa q(t)}{2\pi h},\qquad P|_{r=R}=0, \tag{2}$$

$$P(r,0)=P_0(r). \tag{3}$$

На границе $r=R_1$ выполняются условия непрерывности давлений и потоков:

$$P(R_1-0,t)=P(R_1+0,t),\qquad k_1\frac{\partial P(R_1+0,t)}{\partial r}=k_2\frac{\partial P(R_1-0,t)}{\partial r}.$$

Обозначим $[f]_{R_1}=f(R_1+0,t)-f(R_1-0,t)$, скачок функций при $r=R_1$. Тогда внутренние граничные условия можно представить в виде

$$[P(r,t)]_{R_1} = 0, \quad \left[k\frac{\partial P}{\partial r}\right]_{R_1} = 0. \tag{4}$$

Здесь R_1 - граница при забойной зоны с внешней области, μ_κ - вязкость нефти, $мПа*с$; κ - проницаемость пласта, $м^2$; β - упругоемкость пласта, $Па^{-1}$. Дополнительно, на скважине, т.е. при $r=\rho$ задается давление пласта

$$P\big|_{r=\rho} = P_s(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Требуется определить k_1 и k_2.

Сопряженная задача (*задача с обратным временем отсчета*).

Задается начальное приближение $k_n(r)$. Соответствующее решения системы (1)-(4) обозначим через $P^n(r,t)$. Следующее приближение коэффициента проницаемости пласта обозначим через $k_{n+1}(r)$, а соответствующее решение системы (1)-(5) через $P^{n+1}(r,t)$. Будем искать функцию $k_{n+1}(r)$. Для этого система (1)-(5) записывается относительно функций $\delta P(r,t) = P^{n+1}(r,t) - P^n(r,t)$:

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k_n}{\mu\beta} r \frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{\delta k}{\mu\beta} r \frac{\partial P^{n+1}}{\partial r}\right), \tag{6}$$

$$\left.\left(k_n r\frac{\partial \delta P}{\partial r} + \delta k r \frac{\partial P^{n+1}}{\partial r}\right)\right|_{r=\rho} = 0, \quad \delta P\big|_{r=R} = 0, \quad \delta P\big|_{t=0} = 0, \tag{7}$$

$$[\delta P]_{r=R_1} = 0, \qquad \left[k_n\frac{\partial \delta P}{\partial r} + \Delta k \frac{\partial P^{n+1}}{\partial r}\right]_{r=R_1} = 0. \tag{8}$$

Умножим (6) на произвольную функцию $r\psi(r,t)$ и интегрируем по области Q. Тогда

$$\int_\rho^R r\int_0^T \frac{\partial \delta P}{\partial t}\psi(r,t)dtdr = \int_0^T dt\int_\rho^R \frac{\partial \sigma}{\partial r}\psi dr.$$

Применяем формулу интегрирования по частям по переменной t и r:

$$\int_\rho^R r\left(\delta P\psi\big|_{t=T} - \delta P\psi\big|_{t=0}\right)dr - \int_\rho^R r\int_0^T \delta P\frac{\partial \psi}{\partial t}dtdr = \int_0^T dt\int_\rho^{R_1-0}\frac{\partial \sigma}{\partial r}\psi dr + \int_0^T dt\int_{R_1+0}^R \frac{\partial \sigma}{\partial r}\psi dr =$$

$$= \int_0^T dt\left(\sigma\psi\big|_{R_1-0} - \sigma\psi\big|_\rho + \sigma\psi\big|_R - \sigma\psi\big|_{R_{1+0}}\right) - \int_0^T\int_0^R \sigma\frac{\partial \psi}{\partial r}drdt.$$

После преобразования с учетом начально-граничных условий (7) заключаем, что

$$\delta P\psi\big|_{t=0} = 0, \qquad \sigma\psi\big|_\rho = 0.$$

Дополнительно потребуем, чтобы

$$\psi\big|_{t=T}=0, \qquad \psi\big|_{R}=0\,.$$

Тогда,

$$-\int_{\rho}^{R} r\int_{0}^{T}\delta P\frac{\partial\psi}{\partial t}dtdr=-\int_{0}^{T}\left[\sigma\psi\right]_{R_1}dt-\int_{0}^{T}\int_{0}^{R}\sigma\frac{\partial\psi}{\partial r}drdt\,.$$

Рассмотрим скачок функций $\left[\sigma\psi\right]_{R_1}$. Положим, что функция $\psi(r,t)$ в точке $r=R_1$ непрерывна. Тогда на основе (8) выводится равенство

$$\left[\sigma\psi\right]_{R_1}=\left[\sigma\right]_{R_1}\psi(R_1,t)=0\,.$$

С учетом полученного равенства, последнее интегральное соотношение записывается в виде:

$$-\int_{\rho}^{R} r\int_{0}^{T}\delta P\frac{\partial\psi}{\partial t}dtdr=-\int_{0}^{T}\int_{0}^{R}\frac{k_n}{\mu\beta}r\frac{\partial\delta P}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r}drdt-\int_{0}^{T}\int_{0}^{R}\frac{\Delta k}{\mu\beta}r\frac{\partial P^{n+1}}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r}drdt\,.$$

Первое слагаемое в правой части знака равенство снова интегрируем по частям по переменной r. Тогда

$$-\int_{\rho}^{R} r\int_{0}^{T}\delta P\frac{\partial\psi}{\partial t}dtdr=-\int_{0}^{T}\frac{k_n}{\mu\beta}r\delta P\frac{\partial\psi}{\partial r}\bigg|_{r=R_1-0}dt+\int_{0}^{T}\frac{k_n}{\mu\beta}r\delta P\frac{\partial\psi}{\partial r}\bigg|_{r=\rho}dt-\int_{0}^{T}\frac{k_n}{\mu\beta}r\delta P\frac{\partial\psi}{\partial r}\bigg|_{r=R}dt+$$

$$+\int_{0}^{T}\left[\frac{k_n}{\mu\beta}r\delta P\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{R_1+0}dt+\int_{0}^{T}\int_{0}^{R}\delta P\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k_n}{\mu\beta}r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)drdt-\int_{0}^{T}\int_{0}^{R}\frac{\Delta k}{\mu\beta}r\frac{\partial P^{n+1}}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r}drdt\,.$$

Учитывая граничное условие $\delta P\big|_{r=R}=0$ и группируя подобные слагаемые получим

$$-\int_{\rho}^{R}\int_{0}^{T}\delta P\left(r\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k_n}{\mu\beta}r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)drdt=\int_{0}^{T}\frac{R_1}{\mu\beta}\left[\delta Pk_n\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{R_1}dt+\int_{0}^{T}\frac{k_n}{\mu\beta}r\delta P\frac{\partial\psi}{\partial r}\bigg|_{r=\rho}dt\,\cdot$$

Предположим, что

$$r\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k_n}{\mu\beta}r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0 \text{ и } \left[k_n\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{R_1}=0\,.$$

Учитывая непрерывность функций δP в точке $r=R_1$, преобразуем

$$\left[\delta Pk_n\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{R_1}=\delta P(R_1,t)\left[k_n\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{R_1}=0\,.$$

С учетом полученных равенств интегральное соотношение записывается в виде

$$\int_0^T \delta P \frac{k_n \rho}{\mu\beta} \frac{\partial \psi}{\partial r}\bigg|_{r=\rho} = -\int_0^T \int_0^R \frac{\Delta k}{\mu\beta} r \frac{\partial P^{n+1}}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} drdt .$$

Пусть имеет место равенство

$\frac{k_n \rho}{\mu\beta} \frac{\partial \psi}{\partial r}\bigg|_{r=\rho} = 2\left(P(\rho,t) - P_s(t)\right)$, тогда получится равенство

$$2\int_0^T \delta P\left(P(\rho,t) - P_s(t)\right)dt = -\int_0^T \int_0^R \frac{\Delta k}{\mu\beta} r \frac{\partial P^{n+1}}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} drdt . \qquad (9)$$

Полученная сопряженная задача записывается в виде

$$r\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k_n}{\mu\beta} r \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0 \qquad (10)$$

$$\psi(r,T) = 0, \quad \psi(R,t) = 0, \quad \frac{k_n \rho}{\mu\beta} \frac{\partial \psi}{\partial r}\bigg|_{r=\rho} = 2\left(P(\rho,t) - P_s(t)\right) \qquad (11)$$

$$[\psi]_{R_1} = 0, \quad \left[k_n \frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{R_1} = 0 \qquad (12)$$

Литература:

1 Баренблатт Г.И. О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации жидкости в трещиноватых породах. «Прикладная математика и механика», т. XXVII, вып. 2, 1963

2 Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., издательство «Наука», 1964

3 Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М., Гостоптехиздат, 1949

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Баканов Г.Б.