*Бердимуратов А., Омуралиева Б.Б.*

# ЭКОНОМИКАЛЫК МОДЕЛДЕРИНИН МАКСИМАЛДУУ ТУУРА МЕТОДУНУН ПАРАМЕТРЛЕРИН БААЛОО

*Бердимуратов А., Омуралиева Б.Б.*

# МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

*A. Berdimuratov, B.B. Omuralieva*

# THE METHOD OF HIGHEST POSSIBLE VERISIMILITUDE FOR APPRAISAL PARAMETERS OF UNLINEAR ECONOMETRIC MODELS

*УДК: 51-7:330.4*

*Целью данной работы является эффективность применения метода максимального правдоподобия и некоторые особенности для оценки параметров нелинейных эконометрических моделей.*

***Ключевые слова:*** *правдоподобие, бинарная модель, логарифм, производная, probit-модели, модель Пуассона.*

*The aim of this work is the effectiveness of the method of maximum likelihood and some of the features to estimate the parameters of nonlinear econometric models.*

***Key words:*** *likelihood of a binary model, the logarithm of the derivative, probit- model, the Poisson model.*

Метод максимального правдоподобия имеет некоторые особенности.

Предположим, что наблюдения $y_1, y_2,..., y_T$ независимы. Поскольку $y_t$ может принимать только значения 0 и 1, то функция правдоподобия для бинарной модели имеет следующий вид:

$$\alpha' \boldsymbol{x}_t)] \prod_{y_t=1} F(\alpha' \boldsymbol{x}_t). \qquad (1)$$

Представим выражение (1) в несколько другой форме:

$$L=\prod_{t=1}^{T} F[(\alpha' \boldsymbol{x}_t)]^{y_t} \cdot [1-F(\alpha' \boldsymbol{x}_t)]^{1-y_t} \qquad (2)$$

где переменная $y_t$ принимает значение 0 или 1.

Логарифм выражения (2) имеет следующий вид:

$$l=\ln L=\sum_{t=1}^{T}\{y_t \ln F(\alpha' \boldsymbol{x}_t)+(1-y_t)\cdot \ln[1-F(\alpha' \boldsymbol{x}_t)]\}. \qquad (3)$$

Необходимыми условиями максимизации функции правдоподобия являются равенства нулю всех частных производных ее логарифма по параметрам $\alpha$, т. е.

$$\partial l/\partial \boldsymbol{\alpha}=\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{y_t f_t}{F_t}+(1-y_t)\cdot\frac{-f_t}{(1-F_t)}\right]\cdot \boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{0}. \qquad (4)$$

где $f_t=f(\alpha' \boldsymbol{x}_t)$ и $F_t=F(\alpha' \boldsymbol{x}_t)$, т. е. функции $f_t$ и $F_t$ имеют аргумент $\alpha' \boldsymbol{x}_t$.

Подходы к решению системы (1), т. е. к получению оценок коэффициентов $\alpha$, зависят от формы функционалов $f(\alpha' \boldsymbol{x})$ и $F(\alpha' \boldsymbol{x})$. При этом заметим, что если $F(\alpha' \boldsymbol{x}_t)$ нелинейны, то уравнения в (1) также нелинейны. Для их решения (т. е. для получения оценок параметров $\alpha$) используются итеративные методы.

В частности, для *logit*-модели логарифм правдоподобия вылядит следующим образом:

$$\ln L = \sum_{t=1}^{T}\{y_t\cdot \ln\frac{e^{\alpha' x_t}}{1+e^{\alpha' x_t}}+(1-y_t)\cdot\ln(1-\ln\frac{e^{\alpha' x_t}}{1+e^{\alpha' x_t}})\}, \qquad (5)$$

а необходимыми условиями его максимизации являются:

$$\partial l/\partial \boldsymbol{\alpha}=\sum_{t=1}^{T}(y_t-\frac{e^{\alpha' x_t}}{1+e^{\alpha' x_t}})\cdot \boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{0}. \qquad (6)$$

Для нормального распределения логарифм функции максимального правдоподобия может быть записан в следующем виде:

$$l=\ln L=\sum_{y_t=0}\ln[1-\Phi(\alpha' \boldsymbol{x}_t)]+\sum_{y_t=1}\ln\Phi(\alpha' \boldsymbol{x}_t). \qquad (7)$$

В этом случае необходимые условия максимизации функции правдоподобия могут быть представлены в виде системы:

$$\partial l/\partial \boldsymbol{\alpha} = \sum_{y_t=0}^{T} \frac{-\varphi_t}{1-\Phi_t}\cdot \boldsymbol{x}_t + \sum_{y_t=1}^{T} \frac{\varphi_t}{\Phi_t}\cdot \boldsymbol{x}_t = \mathbf{0}, \qquad (8)$$

где

$$\varphi_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_t-\alpha' x_t)'(y_t-\alpha' x_t)}{\sigma^2}\right); \qquad (9)$$

$$\Phi_t = \int_{-\infty}^{б' x_t} \varphi(u)\,du \qquad (10)$$

Рассмотрим особенности применения метода максимального правдоподобия для оценки двумерной *probit*-модели [1,2]. Для конкретного индивидуума принимают соответственно значения $y_{t1}$ и $y_{t2}$, рассчитывается как

$$P(Y_1=y_{t1},\ Y_2=y_{t2}) = \Phi_2(w_{t1}, w_{t2}, p_{t*}), \qquad (11)$$

где

$$w_{tj}= q_{tj}\cdot z_{tj}\ ;\quad z_{tj}=\boldsymbol{\alpha}'_j \boldsymbol{x}_{tj},\quad j=1,2; \qquad (12)$$

$$\rho_{t*}=q_{t1}\cdot q_{t2}\cdot \rho; \qquad (13)$$

$$q_{t1}=2y_{t1}-1;\ q_{t2}=2y_{t2}-1. \qquad (14)$$

Логарифм функции правдоподобия будет иметь следующий вид:

$$l = \ln L = \sum_{t=1}^{T} \ln \Phi_2(w_{t1}, w_{t2}, \rho_{t*}),$$

где

$$\Phi_2(w_{1t}, w_{2t}, \rho_{t*})=\int_{-\infty}^{w_{2t}} \int_{-\infty}^{w_{1t}} \varphi_2(u_1, u_2, C_t)\,d_{u1}d_{u2}, \qquad (15)$$

а плотность этого распределения имеет следующий вид:

$$\varphi_2(W_{1t}, W_{2t}, p_{t*}) = \frac{e^{-(\frac{1}{2})\cdot(w_{1t}^2+w_{2t}^2-p_{t*}\cdot w_{1t}\cdot w_{2t})/(1-p_{t*}{}^2}}{2p(1-p_{t*}^2)^{1/2}} \qquad (16)$$

Первые производные логарифма правдоподобия по параметрам $\alpha_j$, $j$=1,2; и $\rho$ определяются как

$$\partial \ln L/\partial \alpha_j = \sum_{t=1}^{T}\left[\frac{(2y_{tj}-1)\cdot g_{tj}}{\Phi_2}\right]\cdot x_{tj},\ j = 1,2; \qquad (17)$$

$$\partial \ln L/\partial \rho = \sum_{t-1}^{T} \frac{(2y_{t1}-1)\cdot(2y_{t2}-1)\cdot \varphi_2}{\Phi_2} \qquad (18)$$

где

$$g_{t1} = \varphi(w_{t1})\cdot \Phi\left(\frac{w_{t2}-\rho_{t*}\cdot w_{t1}}{\sqrt{1-\rho_{t*}^2}}\right) = \varphi[(2y_{t1}-1)\cdot \alpha_1' x_{t1}]\times$$

$$\text{х}\phi\ \frac{(2y_{t2}-1)\cdot б_2' x_{t2}-p_{t*}\cdot(2y_{t1}-1)\cdot б_1' x_{t1}}{\sqrt{1-p_{t*}^2}} \qquad (19)$$

и индексы 1 и 2 в $q_{t1}$ перевернуты для получения $q_{t2}$.

Оценки максимального правдоподобия получаются путем одновременного приравнивания трех производных (по $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\rho$) нулю.

Логарифм функции правдоподобия для модели Пуассона имеет следующий вид:

$$l=\ln L= \sum_{t=1}^{T}[-\lambda_t + y_t\cdot \boldsymbol{\alpha}'\cdot \boldsymbol{x}_t - \ln(y_t!)]= \sum_{t=1}^{T}[-e^{\alpha' x_t} + y_t\cdot \boldsymbol{\alpha}'\cdot \boldsymbol{x}_t - \ln(y_t!)]. \qquad (20)$$

Необходимые условия его максимизации можно записать следующим образом:

$\partial \ln L/\partial \alpha = \sum_{t=1}^{T} (y_t - e^{\alpha' x_t}) \cdot \boldsymbol{x}_t = \mathbf{0}$.

**Пример.** Имеется нелинейное уравнение регрессии

$$y_t = б + e_t,$$

где $e_t$ распределена по закону Коши с функцией плотности $f(z)=1/p(1+z^2)$.

**Требуется.**

Построить алгоритм метода максимального правдоподобия Ньютона-Рафсона.

**Решение.**

Функция плотности распределения ошибки для t-го периода запишется следующим образом: $f(e_t) = \frac{1}{p} * (1+e_t^2) = \frac{1}{p} * [1+(y_t - б)^2]$,

соответственно ее логарифм

$$\ln f(e_t) = \ln \frac{1}{p} + \ln[1+(y_t - б)^2],$$

Логарифм функции правдоподобия

$l(б) = \sum \ln \frac{1}{p} + \sum \ln [1+(y_t - б)^2] = \text{const} + \sum \ln [1+(y_t - б)^2]$.

Необходимые условием экстремума функции правдоподобия является равенство нулю ее первой производной.

$\frac{dl}{dб} = \sum \frac{-(y_t - б)}{1+(y_t - б)^2} = 0.$

Таким образом, требуется решить нелинейное уравнение. В соответствии с методом Ньютона-Рафсона получим

$$б_{n+1} = б_n - \frac{ds/dб|б_n}{d^2 s/dб^2|б_n} = б_n - \sum \frac{-(y_t - б_n)}{1+(y_t - б_n)^2} \Big/ \sum \frac{1-(y_t - б_n)^2}{[1+(y_t - б)^2]^2}$$

**Выводы:** истинная ошибка $\varepsilon t$ является "абсолютно" случайной переменной. Ее закон распределения выражает закон распределения значений $yt$ относительно расчетных значений $\hat{y}_t$, рассматриваемых при известных значениях параметров $\alpha 0$, $\alpha 1, ...,$ $\alpha n$, как выборочные математические ожидания $M[yt] = \hat{y}_t = \alpha 0 + \alpha 1 x 1 t + ... + \alpha n x n t$ . Отклонение значения $yt$ от его математического ожидания объясняется влиянием на этот процесс каких-либо случайных воздействий, которые невозможно учесть в рамках данной модели.

**Литература:**


1. Bliss CI. (1934). «The method of probits». *Science* **79** (2037):3

2. Магнус Я.Р.Эконометрика: Начальный курс / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий .- М.- Дело, 2000.


**Рецензент: д.ф-м.н., профессор Чекеев А.**