Искандаров С., Байгесеков А.М.

ЭКИНЧИ ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕС ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ЖАРЫМ ОКТОГУ ДАРАЖАЛУУ АБСОЛЮТТУК ИНТЕГРАЛДАНЫШЫ ЖӨНҮНДӨ

Искандаров С., Байгесеков А.М.

О СТЕПЕННОЙ АБСОЛЮТНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НА ПОЛУОСИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА ВТОРОГО РОДА

S. Iskandarov, A.M. Baigesekov

ABOUT THE EXTENT ABSOLUTE INTEGRABLE ON THE HALF-SOLUTION OF LINEAR VOLTERRA-STIELTJES INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND

УДК: 517.968

Экинчи түрдөгү сызыктуу Вольтерра-Стилтьес интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын жарым октогу абсолюттук жана квадраттык интегралданышынын жетиштүү шарттары аныкталат. Изилдөө учурунда теңдеменин бош мүчөсүнүн аталган касиеттерге ээ болушу талап кылынбайт. Интегралдоо өсүүчү функция боюнча жүргүзүлөт. Теңдемелерди өзгөртүү методу, салмактык жана кесүүчү функциялар методу, бөлүктөп интегралдоо методу колдонулат. Иллюстративдик мисал тургузулат.

Негизги сөздөр: *Вольтерра – Стилтьес интегралдык теңдемеси, өсүүчү функция боюнча туунду, абсолюттук интегралданыш, квадраттык интегралданыш, салмактык функция, кесүүчү функция.*

Устанавливаются достаточные условия абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного интегрального уравнения Вольтерра – Стилтьеса второго рода. При исследовании не требуется, чтобы свободный член уравнения обладал указанными свойствами. Интегрирование проводится по возрастающей функции. Применяются метод преобразования уравнений, метод весовых и срезывающих функций, метод интегрирования по частям. Строится иллюстративный пример.

Ключевые слова: *интегральное уравнение Вольтерра – Стилтьеса, производная по возрастающей функции, абсолютная интегрируемость, квадратичная интегрируемость, весовая функция, срезывающая функция.*

We establish sufficient condition for the absolute and square integrable on the half-solution of linear of Volterra - Stieltjes integral equation second kind. In the study does not require that the free term of the equation with this property. The integration is carried out by an increasing function. We apply the method of conversion equation, method of weight and cutting functions, the method of integration by parts. Construct an illustrative example.

Key words: *Volterra – Stieltjes integral equation, derivative on increasing function, absolutely integrable, square integrable, weighting function, cutting function.*

Все фигурирующие в работе функции являются непрерывными и соотношения справедливы при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$; $J = [t_0, \infty)$;

ИУВС- интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса.

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия принадлежности пространствам $L_g^p(J,R)$ $(p=1,2)$ решения ИУВС:

$$x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)dg(\tau) = f(t), \quad t \ge t_0 \tag{1}$$

без предположения, что его свободный член $f(t) \in L_g^p(J,R)$ $(p=1,2)$, где $g(t)$- возрастающая функция и $dg(\tau)$ понимается в смысле определения А.Асанова $[1]$.

Отметим , что такая задача для частного класса ИУВС (1) ранее была решена в статье авторов $[2]$. Заметим, что для интегрального уравнения Вольтерра (в (1) $g(t) \equiv t$) поставленная задача была решена во многих работах первого автора, например , в $[3-5]$.

Будем использовать следующие обозначения из $[1]$: $x(t) \in L_g^p(J,R)$ $(p=1,2)$ означает $\int_{t_0}^{\infty} |x(t)|^p dg(t) < \infty$ $(p=1,2)$;

$$F'_{g(t)}=\frac{dF(t)}{dg(t)}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{g(t+\Delta t)-g(t)}$$ (если предел существует) ;

$$K'_{g(t)}(t,\tau)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{K(t+\Delta t,\tau)-K(t,\tau)}{g(t+\Delta t)-g(t)}$$ (если предел существует) ;

$$K'_{g(\tau)}(t,\tau)=\lim_{\Delta \tau\to 0}\frac{K(t,\tau+\Delta \tau)-K(t,\tau)}{g(\tau+\Delta \tau)-g(\tau)}$$ (если предел существует) ;

$$K''_{g(t)g(\tau)}(t,\tau)=\frac{\partial K'_{g(t)}(t,\tau)}{\partial g(\tau)}=\frac{\partial K'_{g(\tau)}(t,\tau)}{\partial g(t)}=K''_{g(\tau)g(t)}(t,\tau)$$

(поскольку все фигурирующие в работе функции непрерывны, последнее соотношение справедливо).

Пусть $[4,5]$: $0<\varphi(t)$ - некоторая весовая функция,

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}f_i(t), \tag{f}$$

$\psi_i(t)$ $(i=1\ldots n)$- некоторые срезывающие функции,

$R_i(t,\tau)\equiv\varphi(t)K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}$, $\quad E_i(t)\equiv\varphi(t)f_i(t)(\psi_i(t))^{-1}$ $\quad (i=1\ldots n)$;

$c_i(t)$ $\quad (i=1\ldots n)$ - некоторые функции.

С использованием условий (K), (f), введением функций $\varphi(t)$, $R_i(t,\tau)$, $E_i(t)$, $c_i(t)$ $\quad (i=1\ldots n)$, интегрированием по частям, аналогично $[4-8]$ доказывается, что имеет место соотношение:

$$2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)x(s)\left[\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)x(\tau)dg(\tau)\right]dg(s)-2\int_{t_0}^{t}f(s)\varphi(s)x(s)dg(s)=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R_i(s,\tau)\psi_i(\tau)x(\tau)\psi_i(s)x(s)dg(\tau)dg(s)-2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}E_i(s)\psi_i(s)x(s)dg(s)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big\{R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}\Big[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-$$

$$-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\Big]dg(s)+\int_{t_0}^{t}R'_{ig(\tau)}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2dg(\tau)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R''_{ig(s)g(\tau)}(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2dg(\tau)dg(s)-c_i(t_0)\Big\}, \tag{2}$$

где $\quad X_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)x(\eta)dg(\eta) \qquad (i=1\ldots n).$

Далее поступаем аналогично работам $[4-7]$. Для решения $x(t)\in C(J,R)$ ИУВС (1) умножаем на $\varphi(t)x(t)$, интегрируем по возрастающей функции $g(t)$ в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, вводим условия $(K),(f)$, функции $\psi_i(t), R_i(t,\tau), E_i(t), c_i(t)$ $(i=1\ldots n)$, используем соотношения (2), в результате получаем следующее тождество:

$$2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(x(s))^2dg(s)+\sum_{i=1}^{n}\Big\{R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\left[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\right]dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}R'_{ig(\tau)}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2dg(\tau)-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R''_{ig(s)g(\tau)}(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2dg(\tau)dg(s)\Big\}\equiv$$

$$\equiv c_*+2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)f_0(s)x(s)dg(s), \qquad (3)$$

где $c_*=\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0)$.

ТЕОРЕМА. Пусть 1) $g(t)$- возрастающая функция; $\varphi(t)\geq 0$; выполняются условия $(K),(f)$;

2) $R_i(t,t_0)\geq 0$, $R'_{ig(t)}(t,t_0)\leq 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что $(E_i(t))^2\leq R_i(t,t_0)c_i(t)$, $(E'_{ig(t)}(t))^2\leq R'_{ig(t)}(t,t_0)\,c'_{ig(t)}(t)$ $(i=1\ldots n)$;

3) $R'_{ig(\tau)}(t,\tau)\geq 0$, $R''_{ig(t)g(\tau)}(t,\tau)\leq 0$ $(i=1\ldots n)$;

4) $\varphi(t)(f_0(t))^2\in L^1_g(J,R_+)$.

Тогда для решения $x(t)\in C(J,R)$ ИУВС (1) имеет место утверждение:

$$\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(x(s))^2dg(s)\leq c_{**}, \qquad (4)$$

где

$$c_{**}=c_*+\int_{t_0}^{\infty}\varphi(t)(f_0(t))^2dg(t)<\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношение:

$$2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)f_0(s)x(s)dg(s)\leq 2\int_{t_0}^{t}\sqrt{\varphi(s)}\,|x(s)|\sqrt{\varphi(s)}\,|f_0(s)|dg(s)\leq$$

$$\leq\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(x(s))^2dg(s)+\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(f_0(s))^2dg(s),$$

условия 1) -3) теоремы , из тождества (3) получаем неравенство :

$$\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(x(s))^2dg(s)\leq c_*+\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(f_0(s))^2dg(s),$$

из которого в силу условия 4) теоремы вытекает утверждение теоремы (4). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если 1) выполняются все условия теоремы;

2) $(\varphi(t))^{-1}\in L^1_g(J,R_+/\{0\})$ (соответственно $\varphi(t)\geq\varphi_0>0$), то решение ИУВС (1) $x(t)\in L^1_g(J,R)$ (соответственно $x(t)\in L^2_g(J,R)$).

Первое утверждение этого следствия вытекает из:

$$|x(t)|=(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}(\varphi(t))^{\frac{1}{2}}|x(t)|\leq(\varphi(t))^{-1}+\varphi(t)(x(t))^2$$

интегрированием по функции $g(t)$ и с учетом (4), аналогично теореме 2[9]. Второе утверждение получается из (4) сразу.

ПРИМЕР . Для ИУВС

$$x(t)+\int_0^t (t+1)^{-2}\,\frac{e^{t+\tau}\cos^3\sqrt{t}\,\cos^3\sqrt{\tau}}{\sqrt{t}-\sqrt{\tau}+3}(\sin t\sin\tau)^{\frac{1}{5}}x(\tau)\,d\left(\sqrt{\tau}\right)=$$

$$=-\frac{(t+1)^{-2}e^{t}\cos^3\sqrt{t}(\sin t)^{\frac{1}{5}}}{\sqrt{t}+7}+\frac{(t+1)^{-1}}{t+2},\quad t\geq 0$$

выполняются все условия теоремы при $g(t)=\sqrt{t}$, $\varphi(t)\equiv(t+1)^2$, здесь $t_0=0$, $n=1$, $\psi_1(t)\equiv e^t\cos^3\sqrt{t}(\sin t)^{1/5}$, $R_1(t,\tau)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{t}-\sqrt{\tau}+3}$, $E_1(t)\equiv-\dfrac{1}{\sqrt{t}+7}$, $c_1(t)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{t}+7}$, $f_0(t)\equiv(t+2)^{-1}(t+1)^{-1}$.

Следовательно, решение этого ИУВС $x(t)\in L^p_{\sqrt{t}}(R_+,R)$ $(p=1,2)$.

Литература:

1. *Асанов А.* Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы. – Бишкек: Кыргызко-Турецкий университет «Манас», 2001. – С. 18–64.
2. *Искандаров С., Байгесеков А.М.* Об абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2015. –№7, –С.6–9.
3. *Искандаров С.* О принадлежности пространству $L^2[t_{0,}\infty)$ решения интегрального уравнения Вольтерра // Тез. докл. Всесоюз. конф. по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1979. – Ч.1. – С.150–151.
4. *Искандаров С.* К вопросу о принадлежности пространству $L^2[t_{0,}\infty)$ решения линейного интегрального уравнения типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим,1980. – Вып. 13. – С. 193–198.
5. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. –216 с.
6. *Искандаров С.* Асимптотическая устойчивость двух классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерры //Дифференц. уравнения. – М.,2008. – Т.44, №7. – С.883 – 895.
7. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра:Автореф. дисс…докт.физ.-мат.наук: 01.01.02. – Бишкек, 2003. –34 С.
8. *Толубаев Ж.* К вопросу о принадлежности пространству $L_g^2[t_0,\infty)$ решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стильтьеса // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим,2010. – Вып. 42. – С. 64–70.
9. *Искандаров С.* Об асимптотических свойствах решения системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984. – Вып. 17. – С. 166–174.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Чекеев А.