Пахыров З.П., Темиров М.А., Халилов А.Т.

О СТРЕМЛЕНИИ К НУЛЮ РЕШЕНИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Z.P. Pahyrov, M.A. Temirov, A.T. Halilov

THE TENDENCY TO ZERO OF THE SOLUTIONS AND THEIR DERIVATIVES OF WEAKLY NONLINEAR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THIRD ORDER WITH TIME-DELAYS

УДК: 517.968.74

Кечигүүчү аргументтердүү үчүнчү тартиптеги сызыктуу сымал интегро-дифференциалдык теңдемелердин, бардык чыгарылыштарынын, биринчи, экинчи тартиптеги туундуларынын, аргумент чексизге умтулганда нөлгө умтулуусун камсыздоочу жеткиликтүү шарттар табылды. Теңдемени квадраттка көтөрүү, теңдемени өзгөртүп түзүү, кесүүчү функциялар, кечигүүчү аргументтердүү интегралдык барабарсыздыктар методдору өнүктүрүлдү. Люстерник – Соболевдин леммасы колдонулду.

Негизги сөздөр: *кечигүүчү аргументтер, Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеме, нөлгө умтулгандык, квадраттык интегралданыш, кесүүчү функция.*

Устанавливаются достаточные условия стремления к нулю при неограниченном возрастании независимой переменной всех решений и их первых, вторых производных слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка. Развиваются методы возведения уравнений в квадрат, преобразования уравнений, срезывающих функций и интегральных неравенств с запаздываниями. Используется лемма Люстерника - Соболева. Строится иллюстративный пример.

Ключевые слова*: интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра, запаздывание аргументов, квадратичная интегрируемость, стремление к нулю, срезывающая функция.*

Sufficient conditions tending to zero with increasing independent variable all solutions of weakly nonlinear integro-differential equations of first, second order Volterra type with delays. Develop methods of construction of the equations in the square, conversion equations, cutting functions and integral inequalities with delays. Used Lemma Lusternik – Sobolev. Constructed an illustrative example.

Key words: *delays, the integro-differential equation of Volterra type, tending to zero, square integrability, cutting functions.*

Все фигурирующие ниже функции от $t,(t,\tau),\ x,y,z,u$ являются непрерывными и соотношения имеют место при $t\ge t_0, t\ge\tau\ge t_0,\ |x|,|y|,|z|,|u|<\infty;$ $J=[t_0,\infty)$; ИДУ - интегро-дифференциальное уравнение.

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия стремления к нулю при $t\to\infty$ всех решений и их первых, вторых производных слабо нелинейного ИДУ третьего порядка вида

$$x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)\right]d\tau=F_0\left(t\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}F_j(t,x(\alpha_j(t)),x'(\beta_j(t)),x''(\gamma_j(t)),\int_{t_0}^{t}H_j(t,\tau,x(\sigma_j(\tau)),x'(\delta_j(\tau)),x''(\mu_j(\tau)))d\tau),\quad(1)$$

где $t\ge t_0$, функции $F_j(t,x_j,y_j,z_j,u_j)$, $H_j(t,\tau,x_j,y_j,z_j)$ удовлетворяют условиям слабой нелинейности с неотрицательными коэффициентами $g_{kj}(t),\ h_{rj}(t,\tau)\ \ (k=0,1,2,3;\ \ r=0,1,2)$, функции $\alpha_j(t),\ \beta_j(t),\ \gamma_j(t),\ \sigma_j(t),\ \delta_j(t),\mu_j(t)$ - условиям запаздывания:

$$\alpha_j(t)\le t,\ \beta_j(t)\le t,\ \gamma_j(t)\le t,\ \sigma_j(t)\le t,\ \delta_j(t)\le t,\ \mu_j(t)\le t\quad(j=1..m)\,.\qquad(d)$$

Начальное множество состоит из одной точки t_0.

Отметим, что такая задача ранее была рассмотрена в [1]. В отличие от этой работы, в настоящей работе, выше поставленная задача решается развитием метода, разработанного в [2].

Суть метода такова. Сначала следуя работе [3] в ИДУ делается нестандартная замена:

$$x''(t)+px'(t)+qx(t)=W(t)y(t), \tag{2}$$

где p,q - некоторые вспомогательные параметры, причем $p>0,\ q>0;\ 0<W(t)$ - некоторая весовая функция; $y(t)$ - новая неизвестная функция. Тогда из (2) дифференцированием имеем

$$x'''(t)=[p^2-q]x'(t)+pqx(t)+[W'(t)-pW(t)]y(t)+W(t)y'(t). \tag{3}$$

Подставляя (2), (3) в ИДУ(1) и проделая элементарные преобразования получаем ИДУ первого порядка для $y(t)$ присоединяя к этому ИДУ замену (2), от ИДУ третьего порядка (1) приходим к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x''(t)+px'(t)+qx(t)=W(t)y(t), \\ y'(t)+b_2(t)y(t)+b_1(t)x'(t)+b_0(t)x(t)+ \\ +\int\limits_{t_0}^{t}\left[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)x'(\tau)+K(t,\tau)y(\tau)\right]d\tau=f(t)+ \\ +(W(t))^{-1}F(t,x(\alpha_j(t)),x'(\beta(t)),-px'(\gamma(t))-qx(\gamma(t))+ \\ +W(\gamma(t))y(\gamma(t)),\int\limits_{t_0}^{t}H(t,\tau,x(\sigma(\tau)),x'(\delta(\tau)),\ -px'(\mu(\tau))-qx(\mu(\tau))+ \\ +W(\mu_j(\tau))y(\mu(\tau))d\tau),\ t\ge t_0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$b_2(t)\equiv a_2(t)-p+W'(t)\left(W(t)\right)^{-1},\ b_1(t)\equiv\left[a_1(t)-pa_2(t)+p^2-q\right]\left(W(t)\right)^{-1},$$

$$b_0(t)\equiv\left[a_0(t)-qa_2(t)+pq\right]\left(W(t)\right)^{-1},$$

$$P_0(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\left[Q_0(t,\tau)-qQ_2(t,\tau)\right],$$

$$P_1(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}\left[Q_1(t,\tau)-pQ_2(t,\tau)\right],$$

$$K(t,\tau)\equiv\left(W(t)\right)^{-1}Q_2(t,\tau)W(\tau),\ f(t)\equiv F_0(t)\left(W(t)\right)^{-1}.$$

Пусть [4]:

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}f_i(t), \tag{f}$$

$\psi_i(t)\ \ (i=1..n)$ – некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1},\ E_i(t)\equiv f_i(t)(\psi_i(\tau))^{-1},$$

$$R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t)\ \ (i=1..n), \tag{R}$$

$c_i(t)\ \ (i=1..n)$ – некоторые функции.

Далее следуя [2], для любого решения $(x(t),y(t))$ первое уравнение системы (4) возводим в квадрат [4, с. 28], интегрируем от t_0 до t, в том числе по частям; второе уравнение системы (4) умножаем на $y(t)$, проведем интегрирование в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим условия *(K), (f), (R)*, функции $\psi_i(t),\ R_i(t,\tau),\ E_i(t)\ \ (i=1..n)$, *(R)*, функции $c_i(t)\ \ (i=1..n)$, используем леммы 1.4, 1.5 [5], условия слабой нелинейности для $F(t,x,y,z,u), H(t,\tau,x,y,z),$ сложим полученные соотношения и в итоге получаем следующее интегральное неравенство:

$$u(t)\equiv\int_{t_0}^{t}[\left(x''(s)\right)^2+(p^2-2q)\left(x'(s)\right)^2+q^2\left(x(s)\right)^2]ds+p\left(x'(t)\right)^2+2qx(t)x'(t)+$$

$$+pq\left(x(t)\right)^2+\left(y(t)\right)^2+2\int_{t_0}^{t}b_2(s)\left(y(s)\right)^2ds+2\int_{t_0}^{t}y(s)\{b_1(s)x'(s)+b_0(s)\left(x(s)\right)^2+$$

$$+\int_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)x'(\tau)]d\tau\}ds+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-\int_{t_0}^{t}A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2ds+$$

$$+B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2-2E_i(s)Y_i(s,t_0)+$$

$$+c_i'(s)]ds+\int_{t_0}^{t}R_i'(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2d\tau-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(Y_i(s,\tau))^2d\tau ds\}ds\le u(t_0)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left(W(s)\right)^2(y(t))^2ds+2\int_{t_0}^{t}\left(W(s)\right)^{-1}y(s)\{g_0(s)\left|x(\alpha(s))\right|+g_1(s)\left|x'(\beta(s))\right|+$$

$$+g_2(s)[p\left|x'(\gamma(s))\right|+q\left|x(\gamma(s))\right|+W(\gamma(s))\left|y(\gamma(s))\right|],\int_{t_0}^{s}[G_0(t,\tau)\left|x(\sigma(\tau))\right|+$$

$$+G_1(s,\tau)\left|x'(\delta(\tau))\right|+G_2(s,\tau)(p\left|x'(\mu(\tau))\right|+q\left|x(\mu(\tau))\right|+$$

$$+W(\mu_j(\tau))\left|y(\mu(\tau))\right|]d\tau\}ds,\ \ t\ge t_0, \tag{5}$$

где

$$Y_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)y(\eta)d\eta\quad(i=1..n),\ \ G_r(t,\tau)\equiv g_3(t)h_r(t,\tau)\quad(r=0,1,2).$$

ТЕОРЕМА. Пусть 1) $p>0,q>0,W(t)>0$, выполняются условия (K), (f), (R); 2) $p^2-2q>0,\ p=p_1+p_2,\ pq=q_1+$

$+q_2,\ p_j>0,\ q_j>0\ \ (j=1,2),\ p_2q_2-q^2>0;$ 3) $b_2(t)\ge0;$

4) $A_i(t)\ge0,\ B_i(t)\ge0,\ B_i'(t)\le0,\ R_{i\tau}'(t,\tau)\ge0,$ существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(J,R_+),\ c_i(t),\ R_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такие, что

$$A_i'(t)\le A_i^*(t)A_i(t),\left(E_i^{(k)}(t)\right)^2\le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t),\quad R_{it\tau}''(t,\tau)\le$$

$$\le R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)\quad(i=1..n;\ k=0,1);$$

5) $$\left|b_k(t)\right| + \int_{t_0}^{t} [\left|P_k(t,\tau)\right|\left|(x^{(k)}(\tau)\right| d\tau + (W(t))^2 + (W(t))^{-\frac{1}{2}}\{g_k(t) +$$

$$+g_2(t) + g_2(t)W(\gamma(t)) + \int_{t_0}^{t} G_k(t,\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} G_2(t,\tau)d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t} G_2(t,\tau)W(\mu(\tau))d\tau \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\}) \ \ (k = 0,1).$$

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (4) справедливы утверждения:

$$x^{(k)}(t) \in L^2(J,R) \ \ (k = 0,1,2), \qquad (6)$$

$$y(t) = O(1). \qquad (7)$$

Пусть, кроме того, 6) $W(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ третьего порядка (1) и их первые и вторые производные стремятся к нулю при $t \to \infty$, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} x^{(k)}(t) = 0 \ \ (k = 0,1,2), \qquad (8)$$

Идея доказательства теоремы такова. Из неравенства (5) переходим к интегральному неравенству с запаздываниями для

$$U(t) \equiv \int_{t_0}^{t} [\left(x''(s)\right)^2 + (p^2 - 2q)\left(x'(s)\right)^2 + q^2\left(x'(s)\right)^2]ds + p_1\left(x'(t)\right)^2 +$$

$$+q_1\left(x(t)\right)^2 + \left(y(t)\right)^2 + 2\int_{t_0}^{t} b_2(s)\left(y(s)\right)^2 ds \ge 0$$

и применим лемму об интегральном неравенстве из [6], и в силу наложенных условий теоремы будем иметь утверждения (6), (7) теоремы. Применяя лемму Люстерника – Соболева [7, с. 393-394; 2] из (6) получаем:

$$\lim_{t\to\infty} x^{(k)}(t) = 0 \ \ (k = 0,1).$$

Тогда на условия 6) теоремы и утверждения (7) из замены (2) вытекает, что $x''(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, верны соотношения (8), что дает решение поставленной нами задачи.

ПРИМЕР. Для ИДУ третьего порядка

$$x'''(t) + (6 + e^{\sqrt{t}})x''(t) + (8 + 5e^{\sqrt{t}} + e^{-2t}) + x'(t) + (3 + 3e^{\sqrt{t}} + \frac{e^{-t}}{t^2+1})x(t) +$$

$$+\int_{0}^{t} \{[e^{-t}(t+\tau+2)^{-3} + 3Q_2(t,\tau)]x(\tau) + [e^{-2t-\tau} + 5Q_2(t,\tau)]x'(\tau) +$$

$$+Q_2(t,\tau)]x''(\tau)\}d\tau = -(t+2)^{-1}(\sin t)^{\frac{1}{3}} - \frac{e^{-t}}{(t+1)^2}x(\frac{t}{2}) + \frac{e^{-2t}}{\left|x(t)\right|+3}x'(\frac{t}{3}) -$$

$$-\frac{\sin e^{-t}}{t^2+5}x''(\frac{t}{4}) + \int_{0}^{t} \frac{e^{-t}}{(t+\tau+3)^4}x(\frac{\tau}{5})\cos x(\tau)d\tau - \sin(e^{-t}\int_{0}^{t} \frac{x'(\frac{\tau}{6})}{(t^2+\tau^2+1)}d\tau) +$$

$$+\int_0^t \frac{e^{-2t}x''(\frac{\tau}{7})}{|x''(\tau)+5|}d\tau,\ t\ge 0,$$

где $Q_2(t,\tau)\equiv\left[\dfrac{t+\tau+1}{t+\tau+2}+\dfrac{1}{t-\tau+1}\right]e^{2\tau}(\sin t\,\sin\tau)^{\frac{1}{3}}$, выполняются все условия теоремы при

$p=5,\ q=3,\ W(t)\equiv e^{-t}$, здесь $t_0=0,\ p_1=4,\ p_2=1,\ q_1=1,\ q_2=14,\ b_2(t)\equiv e^{\sqrt{t}}$,

$b_1(t)\equiv e^{-t},\ b_0(t)\equiv(t^2+1)^{-1},\ P_0(t,\tau)\equiv(t+\tau+1)^{-3},\ P_1(t,\tau)\equiv e^{-t-\tau}$),

$$K(t,\tau)\equiv\left[\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2}+\frac{1}{t-\tau+1}\right]e^{t+\tau}(\sin t\,\sin\tau)^{\frac{1}{3}},$$

$$f(t)\equiv-e^t(\sin t)^{\frac{1}{3}}(t+2)^{-1},n=1,\ \psi_1(t)\equiv e^t(\sin t)^{\frac{1}{3}},$$

$$g_0(t)\equiv(t+1)^{-2},\ \alpha_1(t)\equiv\frac{t}{2},$$

$$g_1(t)\equiv e^{-t},\beta_1(t)\equiv\frac{t}{3},\ \ g_2(t)\equiv(t^2+5)^{-1},\ \gamma(t)\equiv\frac{t}{4},\ \ g_3(t)\equiv 1,$$

$$h_0(t,\tau)\equiv(t+\tau+3)^{-4},\sigma_1(t)\equiv\frac{t}{5},\ \ h_1(t,\tau)\equiv(t^2+\tau^2+1)^{-1},$$

$\delta(t)\equiv\dfrac{t}{6},\ h_2(t,\tau)\equiv e^{-t}$. Значит, все решения $x(t)$ и их $x^{(k)}(t)\ \ (k=1,2)$ приведенного ИДУ третьего порядка стремятся к нулю при $t\to\infty$.

Таким образом, нами найден класс ИДУ третьего порядка типа Вольтерра с запаздываниями вида (1), для которого решаема выше приведенная задача. ИДУ иллюстративного примера показывает, что коэффициенты $a_k(t)$ и ядра $Q_k(t,\tau)\ \ (k=0,1,2)$ в ИДУ (1) могут быть негладкими в некоторых точках полуинтервала J.

Литература:

1. Искандаров С., Темиров М. Оценки и асимптотические свойства решений и их производных слабонелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с запаздываниями // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: Мат-лы Междунар. юбилейн. науч. конф., посв. 15-летию образования Кыргызско-Российского Славянского ун-та. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2008. – С. 153 - 159.
2. Искандаров С. Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып. 44. – С.44-51.
3. Искандаров С. О новом варианте метода нестандартного сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып.37. – С. 24-29.
4. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002.–216 с.
5. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс… докт. физ.-мат.наук: 01.01.02 – Бишкек, 2003. – 34 с.
6. Искандаров С., Темиров М.А. Об ограниченности решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка с запаздываниями //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып.36 – С.68 – 73.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.:Наука, 1965. – 520 с.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Чекеев А.