МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

Толубаев Ж.О.

КЕҢЕЙТИЛГЕН ЛОПИТАЛДЫН ЭРЕЖЕСИ

Толубаев Ж.О.

ОБОБЩЕННОЕ ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

J.O. Tolubaev

THE GENERALIZED L'HOSPITAL'S RULE

УДК: 517(072)

Бул макалада функциянын өсүүчү функция боюнча алынган туундусунун жардамында аныкталган кеңейтилген Лопиталдын эрежесин изилдөө каралат.
***Негизги сөздөр:** экстемум, стационардык чекит, өсүүчү функция боюнча алынган туунду, кеңейтилген Лопиталдын эрежеси.*

В этой работе на основе понятия производной по возрастающей функции исследуется обобщенное правило Лопиталя.
***Ключевые слова:** экстемум, стационарная точка, производная по возрастающей функции, обобщенное правило Лопиталя.*

In this paper, based on the concept of derivative of an increasing function is investigated generalized L'Hospital's rule.
***Key words:** ekstemum, stationary point, the derivative ASC functions, generalized L'Hospital's rule.*

Жогорку жана атайын орто окуу жайлардын математика сабагы боюнча негизги курстарында негизинен бир аргументүү функциянын туундуларынын аныкталыштарын, алардын касиеттерин, аларды табуунун негизги жолдорун, алардын колдонуштарын жана Лопиталдын эрежелерин жөнүндөгү негизги теоремалардын далилдөөлөрү менен толук изилденет [2], [3], [4] ,[5].

Ал эми алардын колдонуштары болгон Лопиталдын эрежелери жөнүндөгү негизги теоремалар, формулалар, мисалдар жана маселелерди чыгарууда колдонулуштары практикалык сабактарда каралган[6].

Бул статьяда функциянын өсүүчү функция боюнча алынган туундусунун колдонулуштары болгон Лопиталдын кенейтилген эрежелери, аларды аныктоонун негизги жолдору жана аларды колдонуунун негизги усулдары каралат[1].

1 –т е о р е м а. (Биринчи кеңейтилген Лопиталдын эрежеси: $x \to a-$ умтулгандагы $\frac{0}{0}$ түрүндөгү аныксыздытарды чечүү)

Мейли бизге:

1. $f(x)$ жана $g(x)$- функциялары кандайдыр бир $(a-\delta_1, a)$, $\delta_1 \succ 0$ түрүндө аныкталган интервалда аныкталган жана $\varphi(x)$ өсүүчү функциясы боюнча дифференцирленүүчү болсун;
2. $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} g(x) = 0$ пределдерге ээ болсун;
3. бардык $x \in (a-\delta_2, a)$ жана кээ бир $\delta_2 > 0$ лар үчүн $\frac{df(x)}{d\varphi(x)} \neq 0$, $\frac{dg(x)}{d\varphi(x)} \neq 0$ болсун;
4. $x \to a-$ умтулганда төмөнкү катыштын $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ чектелген же чектелбеген предели жашаса

б.а. $\lim\limits_{x\to a-}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ предели жашаса, анда $\frac{f(x)}{g(x)}$ катышынын предели жашайт жана төмөнкү барабардык орун алат:

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-}\left[\frac{df}{d\varphi}(x) / \frac{dg}{d\varphi}(x)\right] \qquad (1)$$

Д а л и л д ө ө. $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ катышынын предели $x \to a-$ чектелген жана l ге барабар болсун, эгерде андай болбогон учурда анда биз $\frac{f(x)}{g(x)}$ катышын карасак болот. Ал үчүн биз $\varphi(x)$ жана $g(x)$ функцияларын $x = a$ чекитинде $f(a) = g(a) = 0$ деп толуктап алалы. Анда $\varphi(x)$ жана $g(x)$ функциялары a чекитинин сол жагында үзгүлтүксүз болот.

Мындан $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] \to l$ болгондуктан $x \to a-$ умтулганда каалагандай эң кичине $\varepsilon > 0$ оң саны үчүн $\delta_3 = \delta_\varepsilon(\varepsilon) > 0$ саны жашап $x \in (a - \delta_\varepsilon, a)$ тер үчүн $\left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] - l\right| < \varepsilon$ орун алат.

Эгерде $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ деп кабыл алып, ар бир $x \in (a - \delta, a)$ тер үчүн кеңейтилген Кошинин теоремасын колдонсок, анда

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l\right| = \left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] - l\right| < \varepsilon, \text{ орун алат.}$$

Мында $c \in (x, a) \subset (a - \delta, a)$.

Жыйынтыктап айтканда, пределдин аныктамасы боюнча $\lim\limits_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ болот.

Теорема далилденди.

2 – т е о р е м а. Мейли бизге:

1. $f(x)$ жана $g(x)$- функциялары кандайдыр бир $(a; a + \delta_1)$, $\delta_1 > 0$ түрүндө аныкталган интервалда аныкталган жана $\varphi(x)$ өсүүчү функциясы боюнча дифференцирленүүчү болсун;

2. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$ пределдерге ээ болсун;

3. бардык $x \in (a, a + \delta_2)$, жана кээ бир $\delta_2 > 0$ лар үчүн $\frac{df(x)}{d\varphi(x)} \neq 0$, $\frac{dg(x)}{d\varphi(x)} \neq 0$ болсун;

4. $x \to a+$ умтулганда төмөнкү катыштын $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ чектелген же чектелбеген предели жашаса б.а. $\lim\limits_{x \to a+}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ предели жашаса, анда $\frac{f(x)}{g(x)}$ катышынын предели жашайт жана төмөнкү барабардык орун алат: $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a-}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ (2)

Д а л и л д ө ө. $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ катышынын предели $x \to a+$ чектелген жана l ге барабар болсун, эгерде андай болбогон учурда анда биз $\frac{f(x)}{g(x)}$ катышын карасак болот. Ал үчүн биз $\varphi(x)$ жана $g(x)$ функцияларын $x = a$ чекитинде $f(a) = g(a) = 0$ деп толуктап алалы. Анда $\varphi(x)$ жана $g(x)$ функциялары a чекитинин оң жагында үзгүлтүксүз болот.

Мындан $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] \to l$ болгондуктан $x \to a+$ умтулганда каалагандай эң кичине $\varepsilon > 0$ оң саны үчүн $\delta_3 = \delta_\varepsilon(\varepsilon) > 0$ саны жашап $x \in (a; a + \delta_1)$, $\delta_1 > 0$ тер үчүн $\left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] - l\right| < \varepsilon$ орун алат.

Эгерде $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ деп кабыл алып, ар бир $x \in (a; a+\delta_1)$, тер үчүн кеңейтилген Кошинин теоремасын колдонсок, анда

$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - l\right| = \left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] - l\right| < \varepsilon$, орун алат. Мында $x \in (a, x) \subset (a; a+\delta_1)$,

Жыйынтыктап айтканда, пределдин аныктамасы боюнча $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ болот.

Теорема далилденди.

3 –т е о р е м а. Мейли бизге:

1. $f(x)$ жана $g(x)$- функциялары кандайдыр бир $(a-\delta_1, a+\delta_1)$, $\delta_1 > 0$ түрүндө аныкталган интервалда аныкталган жана $\varphi(x)$ өсүүчү функциясы боюнча $x = a$ чекитинен башка бардык чекиттерде дифференцирленүүчү болсун;

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ пределдерге ээ болсун;

3.бардык $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2)$ жана кээ бир $\delta_2 > 0$ дор үчүн $\frac{df(x)}{d\varphi(x)} \neq 0$, $\frac{dg(x)}{d\varphi(x)} \neq 0$ болсун;

4. $x \to a$ умтулганда төмөнкү катыштын $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ чектелген же чектелбеген предели жашаса б.а. $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg((x))}{d\varphi(x)}\right]$ предели жашаса, анда $\frac{f(x)}{g(x)}$ катышынын предели жашайт жана төмөнкү барабардык орун алат: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ (3)

Д а л и л д ө ө. $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ катышынын предели $x \to a$ чектелген жана l ге барабар болсун, эгерде андай болбогон учурда анда биз $\frac{f(x)}{g(x)}$ катышын карасак болот. Ал үчүн биз $\varphi(x)$ жана $g(x)$ функцияларын $x = a$ чекитинде $f(a) = g(a) = 0$ деп толуктап алалы. Анда $\varphi(x)$ жана $g(x)$ функциялары a чекитинде үзгүлтүксүз болот.

Мындан $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] \to l$ болгондуктан $x \to a$ умтулганда каалагандай эң кичине $\varepsilon > 0$ оң саны үчүн $\delta_3 = \delta_\varepsilon(\varepsilon) > 0$ саны жашап $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2)$ тер үчүн $\left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] - l\right| < \varepsilon$ орун алат.

Эгерде $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ деп кабыл алып, ар бир $x \in (a; a+\delta_1)$, тер үчүн кеңейтилген Кошинин теоремасын колдонсок, анда

$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - l\right| = \left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] - l\right| < \varepsilon$, орун алат.

Мында $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2)$

Жыйынтыктап айтканда, пределдин аныктамасы боюнча $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ болот.

Теорема далилденди.

4 –т е о р е м а. (Экинчи кеңейтилген Лопиталдын эрежеси: $x \to a-$ умтулгандагы $\frac{\infty}{\infty}$ түрүндөгү аныксыздыктарды чечүү)

Мейли бизге:

1. $f(x)$ жана $g(x)$- функциялары кандайдыр бир $(a-h,a),\delta h>0;$ түрүндө аныкталган интервалда аныкталган жана $\varphi(x)$ өсүүчү функциясы боюнча дифференцирленүүчү болсун;

2. $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} g(x) = \infty$ пределдерге ээ болсун;

3. бардык $x\in(a-h,a)$ үчүн $\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}\neq 0,\quad \dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\neq 0$ болсун;

4. $\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ катышынын чектелген же чектелбеген предели жашаса б.а. $\lim\limits_{x\to a-}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ предели жашаса, анда $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ катышынын предели жашайт жана төмөнкү барабардык орун алат:

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a-}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)}/\frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] \qquad (4)$$

Д а л и л д ө ө. Мындан аныктама боюнча эле $\lim\limits_{x\to a-}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]=l\in R$, чектелген предели жашайт десек болот.

Чынында эле $\lim\limits_{x\to a-}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]=\infty$ болсо, анда $\lim\limits_{x\to a-}\left[\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}\right]=0$ болот.

Ошондуктан $\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ пределин жашашын көрсөткөндөн бизге $\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ экендигин көрсөтүү жетиштүү болот. Бул бир эле учурда $\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ экендигине алып келет. $x\to a-$ умтулганда $f(x)\to\infty, g(x)\to\infty$ болгондуктан, a чекитинин кандайдыр бир $(a-h_1,a)$ жарым аймагында $f(x)\neq 0$ жана $g(x)\neq 0$ барабарсыздыктары орун алсын дейли.

Мейли ε_1- каалагандай оң сан, $0<\varepsilon_1<1/2$. Бардык $(a-\delta_1,a)$ интервалынан алынган x чекити үчүн $\left|\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]-l\right|<\varepsilon \quad \delta_1=\min(h_1,h_2)$ барабардыгы орун ала тургандай кылып $\delta=\delta_1(\varepsilon)$ ны тандап алсак болот, себеби теореманын шарты боюнча $\lim\limits_{x\to a-}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]=l\in R$ болгон.

Мейли бизге x_0 -чекити $(a-\delta_1,a)$ аймагынын кандайдыр бир чекити болсун. Мындан $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\infty$ болгондуктан $|f(x)|>\dfrac{|f(x_0)|}{\varepsilon_1},\quad \forall x\in(a-\delta_2,a)$ барабарсыздыгы орун ала тургандай $\delta_2=\delta_2(\varepsilon_1)>0$ саны табылат.

Ушундай эле $|g(x)|\succ\dfrac{|g(x_0)|}{\varepsilon_1},\quad \forall x\in(a-\delta_\varepsilon,a)$ барабарсыздыгы орун ала тургандай $\delta_\varepsilon=\delta_\varepsilon(\varepsilon_1)>0$ саны табылат.

Мейли бизге $\delta_4=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}, I_4=\min\{x/x\in(a-\delta_4,a)\}.$ болсун, анда каалагандай $x\in I_4$ үчүн кеңейтилген Кошинин теоремасынын негизинде $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right|=\left|\left[\dfrac{df(c)}{d\varphi(c)}/\dfrac{dg(c)}{d\varphi(c)}\right]-l\right|<\varepsilon_1,$ алабыз, мында $c\in(x,x_0)\subset I_4$.

Мындан төмөнкүнү алабыз:

$$\left|\left[\frac{df(x_0)}{d\varphi(x_0)} / \frac{dg(x_0)}{d\varphi(x_0)}\right]\right| = \left|\left[\frac{df(x_0)}{d\varphi(x_0)} / \frac{dg(x_0)}{d\varphi(x_0)}\right] - l + l\right| \prec \varepsilon_1 + |l| = 1 + |l| .$$

Мындан x -тин ошол эле маанилери үчүн төмөнкү барабарсыздыктардын чынжырын алабыз:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} + \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l\right| \le \left|\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\right| + \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l\right| \le$$

$$\le \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\right| \left|\frac{[g(x) - g(x_0)] / g(x)}{[f(x) - f(x_0)] / f(x)} - 1\right| + \varepsilon_1 = \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\right| A + \varepsilon_1$$

Бирок мындан $|a| < \varepsilon_1$ болгондо $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{g(x)} = 1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)} = 1 + \alpha,$ жана $|\beta| < \varepsilon_1$ болгондо $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{f(x)} = 1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)} = 1 + \beta,$ болгондуктан, анда $A = \left|\dfrac{1+\alpha}{1+\beta} - 1\right| = \left|\dfrac{\alpha - \beta}{1+\beta}\right| \le \dfrac{2\varepsilon_1}{0.5} = 4\varepsilon_1$ келип чыгат.

Акыркы барабардыктан төмөнкүнү алабыз

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \le (1 + |l|) 4\varepsilon_1 + \varepsilon_1 = (4|l| + 5) = \varepsilon.$$

Эгерде $\delta(\varepsilon) = \delta_4\left(\dfrac{\varepsilon}{4|l| + 5}\right)$ деп белгилеп алсак анда, анда каалагандай $\varepsilon \in \left(0; \dfrac{1}{2} 4|l| + 5\right)$ саны үчүн $\delta = \delta(\varepsilon) = \delta_4\left(\dfrac{\varepsilon}{4|l| + 5}\right)$ табылат да, каалаган $x \in (a - \delta, a)$ үчүн $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - l\right| \le \varepsilon$ барабардыгы аткарылат.

Мындан $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ экендиги келип чыгат.

Теорема далилденди.

5 –т е о р е м а. Мейли бизге:

1. $f(x)$ жана $g(x)$- функциялары кандайдыр бир $(a, a + h), h > 0;$ түрүндө аныкталган интервалда аныкталган жана $\varphi(x)$ өсүүчү функциясы боюнча дифференцирленүүчү болсун;

2. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = \infty$ пределдерге ээ болсун;

3. бардык $x \in (a; a + h)$ үчүн $\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)} \ne 0,$ $\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)} \ne 0$ болсун;

4. $\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)} / \dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ катышынын чектелген же чектелбеген предели жашаса б.а. $\lim\limits_{x \to a+}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)} / \dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ предели жашаса, анда $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ катышынын предели жашайт жана төмөнкү барабардык орун алат:

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a-}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] \quad (5)$$

Д а л и л д ө ө . Мындан аныктама боюнча эле $\lim\limits_{x \to a+}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)} / \dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] = l \in R$, чектелген предели жашайт десек болот.

Чынында эле $\lim\limits_{x \to a+}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)} / \dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] = \infty$ болсо, анда $\lim\limits_{x \to a+}\left[\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)} / \dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}\right] = 0$ болот.

Ошондуктан $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ пределин жашашын көрсөткөндөн бизге

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ экендигин көрсөтүү жетиштүү болот. Бул бир эле учурда $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ экендигине алып келет. $x\to a+$ умтулганда $f(x)\to\infty, g(x)\to\infty$ болгондуктан, a чекитинин кандайдыр бир $(a;a+h)$ жарым аймагында $f(x)\neq 0$ жана $g(x)\neq 0$ барабарсыздыктары орун алсын дейли.

Мейли ε_1- каалагандай оң сан, $0<\varepsilon_1<1/2$. Бардык $(a-\delta_1, a)$ интервалынан алынган x чекити үчүн $\left|\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]-l\right|<\varepsilon\ \delta_1=\min(h_1,h_2)$ барабардыгы орун ала тургандай кылып $\delta=\delta_1(\varepsilon)$ ны тандап алсак болот, себеби теореманын шарты боюнча $\lim\limits_{x\to a+}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi((x))}\right]=l\in R$ болгон.

Мейли бизге x_0-чекити $(a;a+h)$ аймагынын кандайдыр бир чекити болсун. Мындан $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\infty$ болгондуктан $|f(x)|>\dfrac{|f(x_0)|}{\varepsilon_1},\ \forall x\in(a;a+h)$ барабарсыздыгы орун ала тургандай $\delta_2=\delta_2(\varepsilon_1)>0$ саны табылат.

Ушундай эле $|g(x)|>\dfrac{|g(x_0)|}{\varepsilon_1},\quad \forall x\in(a;a+h)$ барабарсыздыгы орун ала тургандай $\delta_\varepsilon=\delta_\varepsilon(\varepsilon_1)>0$ саны табылат.

Мейли бизге $\delta_4=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}, I_4=\min\{x/x\in(a;a+h)\}$ болсун, анда каалагандай $x\in I_4$ үчүн кеңейтилген Кошинин теоремасынын негизинде

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right|=\left|\left[\frac{df(c)}{d\varphi(c)}/\frac{dg(c)}{d\varphi(c)}\right]-l\right|<\varepsilon_1,$$ алабыз, мында $c\in(x,x_0)\subset I_4$.

Мындан төмөнкүнү алабыз:

$$\left|\left[\frac{df(x_0)}{d\varphi(x_0)}/\frac{dg(x_0)}{d\varphi(x_0)}\right]\right|=\left|\left[\frac{df(x_0)}{d\varphi(x_0)}/\frac{dg(x_0)}{d\varphi(x_0)}\right]-l+l\right|<\varepsilon_1+|l|=1+|l|.$$

Мындан x-тин ошол эле маанилери үчүн төмөнкү барабарсыздыктардын чынжырын алабыз:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|=\left|\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right|\leq\left|\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right|+\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right|\leq$$
$$\leq\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right|\left|\frac{[g(x)-g(x_0)]/g(x)}{[f(x)-f(x_0)]/f(x)}-1\right|+\varepsilon_1=\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right|A+\varepsilon_1$$

Бирок мындан $|a|<\varepsilon_1$ болгондо $\dfrac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}=1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}=1+\alpha,$ жана $|\beta|<\varepsilon_1$ болгондо $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{f(x)}=1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}=1+\beta$ болгондуктан, анда $A=\left|\dfrac{1+\alpha}{1+\beta}-1\right|=\left|\dfrac{\alpha-\beta}{1+\beta}\right|\leq\dfrac{2\varepsilon_1}{0.5}=4\varepsilon_1$ келип чыгат.

Акыркы барабардыктан төмөнкүнү алабыз

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|\leq(1+|l|)4\varepsilon_1+\varepsilon_1=(4|l|+5)=\varepsilon.$$

Эгерде $\delta(\varepsilon)=\delta_4\left(\dfrac{\varepsilon}{4|l|+5}\right)$ деп белгилеп алсак анда, анда каалагандай $\varepsilon\in\left(0;\dfrac{1}{2}4|l|+5\right)$ саны үчүн $\delta=\delta(\varepsilon)=\delta_4\left(\dfrac{\varepsilon}{4|l|+5}\right)$ табылат да, каалаган $x\in(a;a+h)$ үчүн $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-l\right|\le\varepsilon$ барабардыгы аткарылат.

Мындан $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$ экендиги келип чыгат.

Теорема далилденди.

6 –т е о р е м а.(Экинчи кеңейтилген Лопиталдын эрежеси: *$x\to a$ умтулгандагы $\dfrac{\infty}{\infty}$ түрүндөгү аныксыздытарды чечүү)*

Мейли бизге:

1. $f(x)$ жана $g(x)$- функциялары кандайдыр бир $(a-h,a)\cup(a,a+h),h>0;$ түрүндө аныкталган интервалда аныкталган жана $\varphi(x)$ өсүүчү функциясы боюнча дифференцирленүүчү болсун;

2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ пределдерге ээ болсун;

3. бардык $x\in(a-h,a)\cup(a,a+h);$ үчүн $\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}\ne 0,$ $\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\ne 0$ болсун;

4. $\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ катышынын туундусунун чектелген же чектелбеген

предели жашаса б.а. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$ предели жашаса, анда $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

катышынын предели жашайт жана төмөнкүгө барабар болот:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)}/\frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]\quad(6)$$

Д а л и л д ө ө. Мындан аныктама боюнча эле $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]=l\in R$,

чектелген предели жашайт десек болот.

Чынында эле $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]=\infty$ болсо, анда $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}\right]=0$ болот. Ошондуктан $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ пределин жашашын көрсөткөндөн бизге $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ экендигин көрсөтүү жетиштүү болот. Бул бир эле учурда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ экендигине алып келет.

$x\to a$ умтулганда $f(x)\to\infty,g(x)\to\infty$ болгондуктан, a чекитинин кандайдыр бир $(a-h,a)\cup(a,a+h),h\succ 0;$ жарым аймагында $f(x)\ne 0$ жана $g(x)\ne 0$ барабарсыздыктары орун алсын дейли.

Мейли ε_1- каалагандай оң сан, $0<\varepsilon_1<1/2$. Бардык $(a-h,a)\cup(a,a+h),h>0;$ интервалынан алынган x чекити үчүн $\left|\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]-l\right|<\varepsilon$ $\delta_1=\min(h_1,h_2)$ барабардыгы орун ала тургандай

кылып $\delta=\delta_1(\varepsilon)$ ны тандап алсак болот, себеби теореманын шарты боюнча $\lim\limits_{x\to a-}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]=l\in R$ болгон.

Мейли бизге x_0-чекити $(a-h,a)\cup(a,a+h),h\succ 0;$ аймагынын кандайдыр бир чекити болсун. Мындан $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ болгондуктан

$\left|f(x)\right| > \dfrac{\left|f(x_0)\right|}{\varepsilon_1}, \ \forall x \in (a-h,a)\cup(a,a+h)$ барабарсыздыгы орун ала тургандай $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_1) > 0$ саны табылат.

Ушундай эле $\left|g(x)\right| > \dfrac{\left|g(x_0)\right|}{\varepsilon_1}, \ \forall x \in (a-h,a)\cup(a,a+h)$ барабарсыздыгы орун ала тургандай $\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon(\varepsilon_1) > 0$ саны табылат.

Мейли бизге $\delta_4 = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}, \ I_4 = \min\{x / x \in (a-h,a)\cup(a,a+h)\}$ болсун, анда каалагандай $x \in I_4$ үчүн кеңейтилген Кошинин теоремасынын негизинде

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - l\right| = \left|\left[\frac{df(c)}{d\varphi(c)} / \frac{dg(c)}{d\varphi(c)}\right] - l\right| < \varepsilon_1,$$ алабыз, мында $c \in (x, x_0) \subset I_4$.

Мындан төмөнкүнү алабыз:

$$\left|\left[\frac{df(x_0)}{d\varphi(x_0)} / \frac{dg(x_0)}{d\varphi(x_0)}\right]\right| = \left|\left[\frac{df(x_0)}{d\varphi(x_0)} / \frac{dg(x_0)}{d\varphi(x_0)}\right] - l + l\right| < \varepsilon_1 + |l| = 1 + |l|.$$

Мындан x -тин ошол эле маанилери үчүн төмөнкү барабарсыздыктардын чынжырын алабыз:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} + \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - l\right| \le \left|\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right| + \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - l\right| \le$$

$$\le \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right| \left|\frac{[g(x)-g(x_0)]/g(x)}{[f(x)-f(x_0)]/f(x)} - 1\right| + \varepsilon_1 = \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right| A + \varepsilon_1$$

Бирок мындан $|a| < \varepsilon_1$ болгондо $\dfrac{g(x)-g(x_0)}{g(x)} = 1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)} = 1 + \alpha$ жана $|\beta| < \varepsilon_1$ болгондо $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{f(x)} = 1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)} = 1 + \beta$ болгондуктан, анда $A = \left|\dfrac{1+\alpha}{1+\beta} - 1\right| = \left|\dfrac{\alpha-\beta}{1+\beta}\right| \le \dfrac{2\varepsilon_1}{0.5} = 4\varepsilon_1$ келип чыгат.

Акыркы барабардыктан төмөнкүнү алабыз

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \le (1+|l|)4\varepsilon_1 + \varepsilon_1 = (4|l|+5) = \varepsilon.$$

Эгерде $\delta(\varepsilon) = \delta_4\left(\dfrac{\varepsilon}{4|l|+5}\right)$ деп белгилеп алсак анда, анда каалагандай

$\varepsilon \in \left(0; \dfrac{1}{2}4|l|+5\right)$ саны үчүн $\delta = \delta(\varepsilon) = \delta_4\left(\dfrac{\varepsilon}{4|l|+5}\right)$ табылат да, каалаган $x \in (a-h,a)\cup(a,a+h)$, үчүн $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - l\right| \le \varepsilon$ барабардыгы аткарылат.

Мындан $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ экендиги келип чыгат.

Теорема далилденди.

Эскертүү. 1 жана 4- теоремаларда $x \to a-$ шартын $x \to +\infty$ шартына, ал эми 2 жана 5- теоремалардагы $x \to a+$ шартын $x \to +\infty$ шарттарына алмаштырсак болот.

Мисалы. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{|x|}\right)}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x^2}}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. R чыныгы сандар көптүгүндө өсүүчү $\varphi(x)=\sqrt[3]{x}$ функциясын алалы. Анда $\sqrt{|x|}=|\varphi(x)|^{3/2}$ жана $\sqrt[5]{x^2}=|\varphi(x)|^{6/5}$ болот.

Анда кеңейтилген Лопиталдын биринчи эрежеси боюнча

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{|x|}\right)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\varphi(x)+|\varphi(x)|^{3/2}\right)}{\varphi(x)+(\varphi(x))^{6/5}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\sin\left(\varphi(x)+|\varphi(x)|^{3/2}\right)\right]'_{\varphi(x)}}{\left[\varphi(x)+(\varphi(x))^{6/5}\right]'_{\varphi(x)}}=1$$

Адабияттар:

1. А.Асанов "Производная функции по возразтаюший функции" Табигый илимдер журналы.1998-жыл Манас-Турк университети.
2. Илин В.А,Садовничий В.А, СендовБ.Х. "Математический анализ" Т I,II,III М:Издателства М.Г.У 1985-жыл
3. Рудин У. Основы математического анализа. М.:Мир,1976.
4. Архипов Г.И., Садовничий В.А, Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу.М.:"Высшая школа",1999.
5. Толубаев Ж.О., Кудаяров К.С "Математика боюнча мисалдар жана маселелер жыйнагы" Бишкек-2005.
6. Усубакунов Р. "Дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр" Фрунзе - 1969.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Чекеев А.