МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Искандаров С., Байгесеков А.М.

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ СЫМАЛ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕС ТЕҢДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ЖАРЫМ ОКТОГУ БААЛАНЫШЫ ЖАНА АСИМПТОТИКАЛЫК КАСИЕТТЕРИ

Искандаров С., Байгесеков А.М.

ОБ ОЦЕНКЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА НА ПОЛУОСИ

S. Iskandarov, A.M. Baigesekov

ON ESTIMATE AND ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS OF WEAKLY NONLINEAR VOLTERRA - STIELTJES INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF FIRST ORDER ON THE HALF

УДК: 517.968.74

Сызыктуу сымал биринчи тартиптеги Вольтерра-Стилтьес интегро-дифференциалдык тендемесинин каалаган чыгарылышы үчүн жарым октогу баалоосун, чектелгендигин, нөлгө умтулушун, абсолюттук жана квадраттык интегралданышын камсыз кыла турган жетиштүү шарттар алынат. Интегралдоо жүргүзүлүүчү өсүүчү функциянын туундусу кээ бир чекиттерде үзүлүүчү болуу учуру каралат. Салмактык жана кесүүчү функциялар методу өнүктүрүлөт. Стилтьес интегралын кармаган интегралдык барабарсыздыктар методу колдонулат. Иллюстративдик мисал тургузулат.

***Негизги сөздөр**: Вольтерра-Стилтьес интегро-дифференциалдык теңдемеси, баалоо, чектелгендик, нөлгө умтулгандык, абсолюттук интегралданыш, квадраттык интегралданыш, салмактык функция, кесүүчү функция.*

Устанавливаются достаточные условия, обеспечивающие оценку, ограниченности, стремления к нулю, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси любого решения слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка Вольтерра-Стилтьеса. Рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках. Развивается метод весовых и срезывающих функций. Применяется метод интегральных неравенств с интегралом Стилтьеса. Строится иллюстративный пример.

***Ключевые слова**: интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра - Стилтьеса, оценка, ограниченность, стремление к нулю, абсолютная интегрируемость, квадратичная интегрируемость, весовая функция, срезывающая функция.*

We establish sufficient conditions for providing estimate, boundedness, tends to zero, absolute and square integrable on the half of any solution of weak nonlinear integral-differential equation of first order Volterra - Stieltjes. We consider the case when the derivative increasing function for which integration is carried out, may be discontinuous at some points. Developed method of weighting and cutting functions. Used method of integral inequalities with Stieltjes integral. Construct an illustrative example.

***Key words:** integral- differential equation of Volterra - Stieltjes , estimate, boundedness, tend to zero , absolutely integrable , square integrable , the weighting function , the cutting function.*

Все фигурирующие в работе функции от $t, (t,\tau), x, y$ являются непрерывными при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$, $|x| < \infty$, $|y| < \infty$ и соотношения имеют место при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУВС - интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра-Стилтьеса.

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия для оценки, ограниченности на полуинтервале J, стремления к нулю при $t \to \infty$, принадлежности пространствам $L_g^p(J,R)$ $(p = 1,2)$ любого решения ИДУВС вида

$$x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)dg(\tau) = f(t) + F\left(t, x(t), \int_{t_0}^{t} H(t,\tau,x(\tau))dq(\tau)\right), \ t \ge t_0, \quad (1)$$

где $g(t)$, $q(t)$ - возрастающие функции и $dg(t), dq(t)$ понимаются в смысле определения из [1], функции $F(t,x,y)$, $H(t,\tau,x)$ удовлетворяют по пространственным переменным следующим условиям слабой нелинейности:

$$|F(t,x,y)| \le l(t)|x| + l_1(t)|y|, \quad |H(t,\tau,x)| \le h(t,\tau)|x| \qquad (F,H)$$

с неотрицательными «коэффициентами Липшица» $l(t), l_1(t), h(t,\tau)$. Насколько нам известно, такая задача изучается впервые. Заметим, что в [2] для линейного ИДУВС вида (1) (в (1) $F(t,x,y)\equiv 0$) получены достаточные условия принадлежности пространству $L_g^2(J,R)$ любого его решения в случае, когда $f(t)\in L_g^2(J,R)$.

Напомним, что [1, 2]: $x(t)\in L_g^p(J,R) \Leftrightarrow \int\limits_{t_0}^{\infty}|x(t)|^p dg(t) < \infty \quad (p=1,2)$,

$\Leftrightarrow$ -знак эквивалентности.

Пусть [3,4]: $0<\varphi(t)$ - некоторая весовая функция,

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau), \qquad (K)$$

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}f_i(t), \qquad (f)$$

$\psi_i(t)$ $(i=1\ldots n)$- некоторые срезывающие функции,

$R_i(t,\tau)\equiv\varphi(t)K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}, \quad E_i(t)\equiv\varphi(t)f_i(t)(\psi_i(t))^{-1}$

$(i=1\ldots n)$; $c_i(t)$ $(i=1\ldots n)$-некоторые функции.

С использованием условий (K), (f), введением функций $\varphi(t)$, $R_i(t,\tau), E_i(t), c_i(t)$ аналогично [3-5] доказывается, что

$$2\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s)x(s)\left[\int\limits_{t_0}^{s}K(s,\tau)x(\tau)dg(\tau)\right]dg(s)-2\int\limits_{t_0}^{t}f(s)\varphi(s)x(s)dg(s)=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}R_i(s,\tau)\psi_i(\tau)x(\tau)\psi_i(s)x(s)dg(\tau)dg(s)-2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t}E_i(s)\psi_i(s)x(s)dg(s)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big\{R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-\int\limits_{t_0}^{t}\Big[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-$$

$$-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\Big]dg(s)+\int\limits_{t_0}^{t}R'_{ig(\tau)}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2dg(\tau)-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}R''_{ig(s)g(\tau)}(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2dg(\tau)dg(s)-c_i(t_0)\Big\}, \qquad (2)$$

где $X_i(t,\tau)\equiv\int\limits_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)x(\eta)dg(\eta) \qquad (i=1\ldots n)$,

а также согласно определениям из [1]:

$$c'_{ig(t)}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{c_i(t+\Delta t)-c_i(t)}{g(t+\Delta t)-g(t)} \qquad (i=1\ldots n),$$

$$R'_{ig(t)}(t,\tau)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R_i(t+\Delta t,\tau)-R_i(t,\tau)}{g(t+\Delta t)-g(t)}\qquad (i=1...n),$$

$$R'_{ig(\tau)}(t,\tau)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R_i(t,\tau+\Delta\tau)-R_i(t,\tau)}{g(t+\Delta t)-g(t)}\qquad (i=1...n),$$

$$R''_{ig(t)g(\tau)}(t,\tau)=\frac{\partial R_{ig(t)}(t,\tau)}{\partial g(\tau)}=\frac{\partial R_{ig(\tau)}(t,\tau)}{\partial g(t)}=R''_{ig(\tau)g(t)}(t,\tau)\qquad (i=1...n),$$

(эти пределы и соотношения существует согласно нашему первоначальному договору о том, что все фигурирующие в работе функции являются непрерывными).

Отметим, что при получении соотношения (2) используются соотношения (1.17)-(1.19) из [4, с. 46-47], соотношения (9) из [5], соотношение (10) из [2], леммы 1.4 , 1.5 из [6].

Согласно [1,2] имеем

$$\int_{t_0}^{t}x'(s)x(s)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\frac{dx(s)}{ds}\frac{dg(s)}{dg(s)}x(s)dg(s)=\int_{t_0}^{t}g'(s)\frac{1}{2}d(x(s))^2=$$

$$=\frac{1}{2}g'(t)(x(t))^2-\frac{1}{2}g'(t_0)(x(t_0))^2-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}[g'(s)](x(s))^2dg(s). \tag{3}$$

Аналогично (3) получаем

$$\int_{t_0}^{t}x'(s)\varphi(s)x(s)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\frac{dx(s)}{ds}\varphi(s)\frac{dg(s)}{dg(s)}x(s)dg(s)=\int_{t_0}^{t}g'(s)\varphi(s)\frac{1}{2}d(x(s))^2=$$

$$=\frac{1}{2}g'(t)\varphi(t)(x(t))^2-\frac{1}{2}g'(t_0)\varphi(t_0)(x(t_0))^2-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}[g'(s)\varphi(s)](x(s))^2dg(s). \tag{4}$$

Из (4) при $\varphi(t)\equiv 1$ вытекает (3).

Теперь поступаем аналогично как в [3-6]. Для любого решения $x(t)$ ИДУВС (1) умножаем на $\varphi(t)x(t)$, интегрируем по возрастающей $g(t)$ в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, вводим условия $(K),(f)$, функции $R_i(t,\tau),\ E_i(t),\ c_i(t)$, используем соотношения (2), (4) и условие (F,H). Тогда приходим к следующему неравенству

$$g'(t)\varphi(t)(x(t))^2+\int_{t_0}^{t}\Delta(s)(x(s))^2dg(s)+\sum_{i=1}^{n}\Big\{R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\Big[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\Big]dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}R'_{ig(\tau)}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2dg(\tau)-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R''_{ig(s)g(\tau)}(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2dg(\tau)dg(s)\Big\}\le c_*+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)|x(s)|\left[l(s)|x(s)|+\int_{t_0}^{s}G(s,\tau)|x(\tau)|dq(\tau)\right]dg(s), \tag{5}$$

где $\Delta(t)\equiv 2\varphi(t)a(t)-\dfrac{d}{dg(t)}[g'(t)\varphi(t)],\ c_*=g'(t_0)\varphi(t_0)(x(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0),\ G(t,\tau)\equiv l_1(t)h(t,\tau).$

ТЕОРЕМА. Пусть 1) $g(t),q(t)$- возрастающие функции; $\varphi(t)\ge 0$; выполняются условия (F,H), $(K),(f)$;

2) существует функция $\beta(t)>0$ такая, что $g'(t)\varphi(t)\ge\beta(t)$;

3) $\Delta(t)\ge 0$; 4) $R_i(t,t_0)\ge 0,\ R'_{ig(t)}(t,t_0)\le 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что

$(E_i(t))^2 \le R_i(t,t_0)c_i(t), \quad (E'_{ig(t)}(t))^2 \le R'_{ig(t)}(t,t_0)c'_{ig(t)}(t) \qquad (i=1...n)$;

5) $R'_{ig(\tau)}(t,\tau) \ge 0, \quad R''_{ig(t)g(\tau)}(t,\tau) \le 0 \qquad (i=1...n)$;

6) $\int\limits_{t_0}^{\infty} \varphi(t)\left[l(t)(\beta(t))^{-1} + (\beta(t))^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{t_0}^{t} G(t,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}} dq(\tau) \right] dg(t) < \infty.$

Тогда для любого решения $x(t) \in C^1(J,R)$ с любым начальным данным $x(t_0)$ справедливы утверждения:

$$x(t) = (\beta(t))^{-\frac{1}{2}} O(1), \tag{6}$$

$$\Delta(t)(x(t))^2 \in L^1{}_g(J,R_+). \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что условие (4) обеспечивает:

$$R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2 - 2E_i(t)X_i(t,t_0) + c_i(t) -$$
$$- \int\limits_{t_0}^{t} \left[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2 - 2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0) + c'_{ig(s)}(s) \right] dg(s) \ge 0 \quad (i=1...n),$$

в силу условий 1) -5) имеем интегральное неравенство :

$$u(t) \equiv \beta(t)(x(t))^2 + \int\limits_{t_0}^{t} \Delta(s)(x(s))^2 dg(s) \le c_* +$$
$$+ 2\int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s)\left[g(s)(\beta(s))^{-1}u(s) + (\beta(s))^{-\frac{1}{2}}(u(s))^{\frac{1}{2}} \int\limits_{t_0}^{s} G(s,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}}(u(\tau))^{\frac{1}{2}} dq(\tau) \right] dg(s). \tag{8}$$

Разрешая интегральное неравенство (8), аналогично лемме 3 из [7] и учитывая условие 6) , получаем

$$u(t) \le c_* \exp\left(2\int\limits_{t_0}^{\infty} \varphi(s)\left[l(s)(\beta(s))^{-1} + (\beta(s))^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{t_0}^{t} G(t,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}} dq(\tau) \right] dg(t) \right) = c_{**} < \infty. \tag{9}$$

Так как , $\beta(t)(x(t))^2 \le u(t)$, т.е. $|x(t)| \le (\beta(t))^{-\frac{1}{2}}(u(t))^{\frac{1}{2}}$, $\int\limits_{t_0}^{t} \Delta(s)(x(s))^2 dg(s) \le u(t)$, то из оценки (9) вытекают утверждения (6), (7) теоремы.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекают следующие предложения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполняются все условия теоремы и $\beta(t) \ge \beta_0 > 0$, то любое решение ИДУВС (1) ограниченно на J.

Это следует из оценки (6).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполняются все условия теоремы и $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(t) = \infty$, то любое решение ИДУВС (1) $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Это утверждение тоже получается из оценки (6).

СЛЕДСТВИЕ 3. Если выполняются все условия теоремы и $\Delta(t) > 0$, $(\Delta(t))^{-1} \in L^1_g(J, R_+/\{0\})$ (соответственно $\Delta(t) \ge \Delta_0 > 0$), то любое решение ИДУВС (1) $x(t) \in L^1_g(J,R)$ (соответственно $x(t) \in L^2_g(J,R)$).

Первое утверждение этого следствия аналогично теореме 2[8] следует из неравенства $|x(t)| \equiv |x(t)|(\Delta(t))^{\frac{1}{2}}(\Delta(t))^{-\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}\left[\Delta(t)(x(t))^2 + (\Delta(t))^{-1} \right]$ интегрированием на отрезке $[t_0,t]$ по функции $g(t)$.

Второе утверждение сразу следует из утверждения (7) теоремы.

ПРИМЕР. Для ИДУВС

$$x'(t)+\left(e^t+\sqrt{t}\right)x(t)+\int_0^t\left\{\frac{e^{\sqrt[3]{t\cos t}+\sqrt[3]{\tau\cos\tau}+t+\tau}\sin\sqrt{t}\sin\sqrt{\tau}}{(t+1)\sqrt{t}\left(\sqrt{t}-\sqrt{\tau}+9\right)}+(t+1)(\tau+1)^2\sqrt{\tau}\right\}x(\tau)d\sqrt{\tau}=$$

$$=-\frac{5e^{t+\sqrt[3]{t\cos t}}\sin\sqrt{t}}{(t+1)\sqrt{t}\left(\sqrt{t}+12\right)}-\frac{e^{-t}x^2}{|x|+2}+\int_0^t\frac{x(\tau)\sin x(\tau)}{(t+\tau+3)^{10}}d\sqrt[3]{\tau},\qquad t\geq 0$$ выполняются все условия теоремы и следствий 1-3 при $\varphi(t)\equiv(t+1)\sqrt{t}$, здесь $t_0=0$, $g(t)=\sqrt{t}$, $g'(t)\varphi(t)=\frac{1}{2}(t+1)\equiv\beta(t)$, $\frac{d}{d\sqrt{t}}\left[g'(t)\varphi(t)=\sqrt{t}\right]$

$\Delta(t)\equiv 2e^t+\sqrt{t}$, $n=2$, $\psi_1(t)\equiv e^{t+\sqrt[3]{t\cos t}}\sin\sqrt{t}$, $R_1(t,\tau)\equiv\frac{1}{\sqrt{t}-\sqrt{\tau}+9}$, $E_1(t)=-\frac{5}{\sqrt{t}+12}$,

$c_1(t)\equiv\frac{25}{\sqrt{t}+12}$, $\psi_2(t)\equiv(t+1)^2\sqrt{t}$, $R_2(t,\tau)\equiv 1$, $E_2(t)\equiv c_2(t)\equiv 0$, $q(t)=\sqrt[3]{t}$,

$l(t)\equiv e^{-t}$, $G(t,\tau)\equiv\frac{1}{(t+\tau+3)^{10}}$.

Таким образом, нам удалось решить выше поставленную задачу, т.е. нашли класс ИДУВС вида (1), для которого наша задача решаема. Заметим, что нам также удалось, снять условие $g'(t)\in C(J,R_+)$ из работы [2], что достигли за счет введения некоторой весовой функции $\varphi(t)\geq 0$.

Литература:

1. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы. - Бишкек: Кыргызко-Турецкий университет «Манас», 2001. - С. 18-64.
2. Толубаев Ж.О. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра-Стильтьеса на полуоси // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2010. - Вып. 43. - С. 40-45.
3. Искандаров С. Достаточные условия ограниченности и устойчивости решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка типа Вольтерра. Неограниченность решений линейных однородных уравнений первого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим,1980. - Вып. 13. - С. 149-184.
4. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. –216 с.
5. Искандаров С. Асимптотическая устойчивость двух классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерры //Дифференц. уравнения. - М., 2008. - Т.44, №7. - С. 883-895.
6. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра:Автореф. дисс…докт.физ.-мат.наук: 01.01.02. - Бишкек, 2003. - С. 4.
7. Искандаров С. О леммах с интегралом Стилтьеса и их применении к изу3чению асимптотических свойств решений Вольтерровых интегро-дифференциальных и интегральных уравнений// Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 1999. - Вып.28. - С.64-74.
8. Искандаров С. Об асимптотических свойствах решения системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1984. - Вып. 17. - С. 166-174.

Рецензент: д.ф.-м.н. Темиров Б.К.