

Рахманкулов Б.З.

**БИР КАЛЫПТУУ МЕЙКИНДИКТЕРДИН ВОЛМЭН КОМПАКТИФИКАЦИЯСЫ
ЖАНА ФУНКЦИЯЛАР АЛГЕБРАСЫ**

Рахманкулов Б.З.

**ВОЛМЭНОВСКАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ И АЛГЕБРА ФУНКЦИЙ
НА РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

B.Z. Rakhmankulov

**WALLMAN COMPACTIFICATION AND ALGEBRA OF FUNCTIONS
ON UNIFORM SPACES**

УДК: 515.12

Соз-ичке бир калыптуу мейкиндиктердин базаларынын мүнөздөмөсү алынат жана β -сыяктуу компактификациясы үчүн Э. Чехтин теоремасынын бир калыптуу аналогу далилденет.

Негизги сөздөр: *и- ачык, и- туюк көптүктөр, соз- чагылдыруу, нормалдуу база, соз- ичке мейкиндик.*

Получена характеристика базы соз-тонких равномерных пространств и для β -подобной компактификации доказан равномерный аналог теоремы Э.Чеха.

Ключевые слова: *и-открытые, и-замкнутые множества, соз-отображение, нормальная база, соз-тонкое пространство.*

The characterization of bases of соз-fine uniform spaces have been obtained and for β -like compactification the uniform analogue of E.Čech Theorem have been proved.

Key words: *u-open, u-closed sets, соз-mapping, normal base, соз-fine space.*

1. Введение

Данная статья является расширенным вариантом работы [7]. Обозначения и основные свойства равномерных пространств используются из книг [21], [2], [10]. Будем обозначать через $U(uX)$ ($U^*(uX)$) множество всех (ограниченных) равномерно непрерывных функций на равномерном пространстве uX . Естественной равномерностью на uX , порожденной $U(uX)$ ($U^*(uX)$), будет u_c (u_p) это слабейшая равномерность на X относительно которой все равномерно непрерывны, функции из $U(uX)$ ($U^*(uX)$). Очевидно, $u_p \subseteq u_c \subseteq u_\omega \subseteq u$, где базу равномерности u_ω образуют все счетные покрытия из u . Самюэлевская компактификация $s_u X$ есть пополнение X относительно равномерности u_p . Z_u это кольцо нуль-множеств функции из $U(uX)$ или $U^*(uX)$ и CZ_u является кольцом конуль-множеств функции из $U(uX)$ или $U^*(uX)$. CZ_u состоит из дополнений множеств из Z_u и, наоборот. Отметим, что все множества CZ_u (Z_u) совпадают со множеством всех u – открытых (u – замкнутых) множеств на равномерном пространстве uX в смысле М. Charalambous [3], [4]. Z_u образует на равномерном пространстве uX базу в смысле [23], и следовательно она, тем более является нормальной базой [11], [23], [15].

Будем обозначать множество натуральных чисел через Γ , \check{Y} – вещественная прямая, u_Y равномерность на \check{Y} , порожденная естественной метрикой; для $X \subset Y$ $[X]_Y$ обозначает замыкание X в Y , для компактов используется и единственная равномерность.

Для тонкой (*fine*) равномерности u_f на Тихоновском пространстве X [10], [21] каждая непрерывная функция является равномерно непрерывной, следовательно $U(u_f X) = C(X)$ ($U^*(u_f X) = C^*(X)$) и $Z_{u_f} = Z(X)$ множество всех нуль-множеств, $CZ_{u_f} = CZ(X)$ множество всех конуль-множеств на X [10], [16]. Каждый максимальный Z_u – фильтр на Z_u называется Z_u – ультрафильтром и Z_{u_f} – ультрафильтр на $Z(X)$ называется Z_u – ультрафильтром. [15].

Покрытие из u -открытых множеств называется u -открытым и покрытие из конуль-множеств называется функционально открытым.

Определение 1.1. Отображение $f : uX \rightarrow vY$ называется coz -отображением, если $f^{-1}(Cz_v) \subseteq Cz_u$ (или $f^{-1}(z_v) \subseteq z_u$) [3], [13]. Отображение $f : uX \rightarrow Y$ равномерного пространства uX в Тихоновское пространство Y называется z_u -непрерывным, если $f^{-1}(CZ(X)) \subseteq Cz_u$ (или $f^{-1}(z(Y)) \subseteq z_u$) [9].

Очевидно, что каждая равномерно непрерывная функция является coz -отображением, обратное вообще говоря, неверно [3], [4]. Также каждое z_u -непрерывное отображение $f : uX \rightarrow Y$ является coz -отображением $f : uX \rightarrow vY$ для каждой равномерности v на Y . Если Y Линделёфово или (Y, ρ) метрическое пространство, то их coz -отображение является z_u -непрерывным (см., [3], [4]). Если $Y = \check{Y}$ является вещественной прямой, или $Y = I = [0, 1]$ единичный интервал coz -отображение $f : uX \rightarrow \check{Y}$ называется u -непрерывной функцией и coz -отображение $f : uX \rightarrow I$ называется u -функцией [3], [4].

Обозначим через $C_u(X)$ ($C_u^*(X)$) множество всех (ограниченных) u -непрерывных функций на равномерном пространстве uX и $Z(uX)$ кольцо нуль-множеств из $C_u(X)$ или $C_u^*(X)$ и $CZ(uX)$ состоит из дополнений множеств из $Z(uX)$ и, наоборот.

Предложение 1.2. [6] На равномерном пространстве uX множество $\mathcal{B}_p^*(\mathcal{B}_\omega^*)$ всех конечных (счетных) u -открытых покрытий образует базу равномерности $u_p^z(u_\omega^z)$. Более того, $u_p \subseteq u_p^z$, $u_p \subseteq u_c \subseteq u_\omega \subseteq u_\omega^z$.

Предложение 1.3. [6] образует полное подкольцо $C(X)$ с инверсией. Оно содержит константы, отделяет точки и замкнутые множества, является равномерно замкнутым и замкнуто относительно инверсии, т.е.если. if $f \in C_u(X)$ и $f(x) \neq 0$ для всех $x \in X$ то $1/f \in C_u(X)$ (является алгеброй в смысле [17], [18], [20]).

Лемма 1.4. [6] (1) coz -отображение $f : uX \rightarrow vY$ в компакт vY является равномерно непрерывным отображением $f : u_p^z X \rightarrow vY$;

(1') coz -отображение $f : uX \rightarrow vY$ в \aleph_0 -ограниченное равномерное пространство vY является равномерно непрерывным отображением $f : u_\omega^z X \rightarrow vY$.

$$(2) U(uX) = U(u_c X) = U(u_\omega X) \subset U(u_p^z X) = C_u(X);$$

$$(2') U(u_p X) = U^*(uX) \subset U(u_p^z X) = U^*(u_\omega^z X) = C_u^*(X) \subset C_u(X).$$

$$(3) Z_u \equiv Z_{u_p} = Z_{u_c} = Z_{u_\omega} = Z_{u_p^z} = Z_{u_\omega^z} = Z(uX).$$

$$(4) \check{N}_u(X) \text{ является полным кольцом функций с инверсией на } X.$$

Следствие 1.5.[6] (1) u_p^z является слабейшей равномерностью на X , относительно которой coz -отображение в компакт vY равномерно непрерывно.

(2) u_ω^z является слабейшей равномерностью на X , относительно которой каждое coz -отображение $f : uX \rightarrow vY$ в \aleph_0 -ограниченное равномерное пространство vY равномерно непрерывно.

Пусть $\omega(X, Z_u)$ Волмэновская компактификация по нормальной базе Z_u [11]. Отметим, что $\omega(X, Z_u)$ является β -подобной компактификацией на X [22] и положим $\beta_u X = \omega(X, Z_u)$.

Теорема 1.6. [6]. Для равномерного пространства uX следующие компактификации X совпадают:

(1) Пополнение X относительно равномерности u_p^z .

(2) Волмэновская компактификация $\omega(X, Z_u)$ пространства X по нормальной базе Z_u .

(3) Компактификация, которая является пространством максимальных идеалов $C_u^*(X)$ снабжённая Стоуновской топологией [24].

Следствие 1.7.[6]. Каждое coz – отображение $f: uX \rightarrow vY$ продолжается до непрерывного отображения $\beta f: \beta_u X \rightarrow \beta_v Y$. Первая аксиома счётности не выполнена в каждой точке $x \in \beta_u X \setminus X$. Для равномерных пространств uX и $u'X$ мы имеем, $\beta_u X = \beta_{u'} X$ если и только, если $Z_u = Z_{u'}$.

Теорема 1.8. [6] Для равномерного пространства uX следующие условия равносильны:

(1) Самозлеванная компактификация $s_u X$ пространства является uX β – подобной компактификацией X ;

(2) $u_p = u_p^z$;

(3) каждое coz – отображение $f: uX \rightarrow K$ в компакт K продолжается до $s_u X$;

(4) каждая u – функция $f: uX \rightarrow I$ в I продолжается до $s_u X$;

(5) если $Z_1, Z_2 \in Z_u$ и $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ то $[Z_1]_{s_u X} \cap [Z_2]_{s_u X} = \emptyset$;

(6) $[Z_1]_{s_u X} \cap [Z_2]_{s_u X} = [Z_1 \cap Z_2]_{s_u X}$ следует для любого $Z_1, Z_2 \in Z_u$;

(7) каждая точка f $s_u X$ есть предел единственного z_u – ультрафильтра uX ;

(8) каждый z_u – ультрафильтр является фильтром Коши относительно u_p .

2. О компактификации coz – тонких равномерных пространств

Определение 2.1. [13] Равномерное пространство uX называется Александровским, если каждое конечное u – открытое покрытие равномерно.

Теорема 2.2. Для равномерного пространства, uX $s_u X = \beta_u X$ если и только если uX является Александровским пространством.

Доказательство. Пусть $s_u X = \beta_u X$ для равномерного пространства uX . Тогда $u_p = u_p^z$, т.е. конечное u – открытое покрытие равномерно, следовательно, uX является Александровским пространством.

Обратно, если равномерное пространство uX является Александровским, то $u_p = u_p^z$, и следовательно $s_u X = \beta_u X$ (see Theorem 1.8). Что и требовалось доказать.

Определение 2.3 [13] Отображение $f: uX \rightarrow vY$ называется coz – гомеоморфизмом, если f coz – отображение X на Y взаимно однозначно и обратное отображение $f^{-1}: vY \rightarrow uX$ является coz – отображением. Два равномерных пространства uX и vY называется coz – гомеоморфными, если существует coz – гомеоморфизмом uX на vY .

Следующая теорема является равномерным аналогом теоремы Е. Šech [6].

Теорема 2.4. Пусть uX и vY равномерные пространства с первой аксиомой счетности. Тогда uX coz – гомеоморфно vY , если только, если $\beta_u X$ гомеоморфно $\beta_v Y$.

Доказательство. Если uX coz – гомеоморфно vY , то очевидно что $\beta_u X$ гомеоморфно $\beta_v Y$ (Следствие 1.7).

Обратно, если $\beta_u X$ гомеоморфно $\beta_v Y$, то равномерные пространства $u_p^z X$ и $v_p^z Y$ равномерные гомеоморфны между собой (пункты 1, 2 Теорема 1.8) и все точки с первой аксиомой счетности $\beta_u X$ переходят во все точки с первой аксиомой счетности $\beta_v Y$, т.е. X coz – гомеоморфно Y (Следствие 1.7, [1, Ch. IV, Ex.34]). что и требовалось доказать.

Определение 2.5 [12], [13]. Равномерное пространство uX называется coz – тонким, если каждое coz – отображение $f: uX \rightarrow vY$ равномерно непрерывно.

Теорема 2.6. [12], [13]. Для равномерного пространства uX следующие условия равносильны:

- (1) uX является coz – тонким пространством;
- (2) uX является \mathcal{M} – тонким и близостно-тонким пространством;
- (3) для каждого отображения $f : uX \rightarrow v_p Y$ в равномерное пространство vY , если $f : uX \rightarrow v_p Y$ равномерно непрерывно, то $f : uX \rightarrow v_f Y$ является равномерно непрерывным, где v_f тонкая равномерность на Y ;
- (4) для каждого отображения $f : uX \rightarrow v_p Y$ в метризуемое пространство vY , если $f : uX \rightarrow v_p Y$ равномерно непрерывно, то $f : uX \rightarrow v_f Y$ являются равномерно непрерывным, где v_f тонкая равномерность на Y ;
- (5) uX близостно тонкое Александровское пространство.

Замечание 2.7. Информацию о \mathcal{M} – тонких и близостно-тонких равномерных пространствах см., например [12], [13], [19].

Теорема 2.8. Пусть uX и vY coz – тонкие равномерные пространства с первой аксиомой счетности. Тогда uX равномерно гомеоморфно vY , если только если $\beta_u X$ гомеоморфно $\beta_v Y$.

Доказательство. Следует из Теоремы 2.4 и Определения 2.5.

Замечание 2.9. Напомним, что u – открытое покрытие α равномерного пространства uX называется coz – аддитивным, если $\cup \alpha' \in Cz_u$ для каждого $\alpha' \subset \alpha$ [12], [13].

Теорема 2.10. Для равномерного пространства uX следующие условия равносильны:

- (1) uX coz – тонко;
- (2) семейство $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^*$ всех σ – локально конечных вполне coz – аддитивных u – открытых покрытий база равномерности u ;
- (3) все локально конечные coz – аддитивные u – открытые покрытия образуют базу равномерности u .

Доказательство (1) \Rightarrow (2). Для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}^*$ покрытие $\alpha \wedge \beta$ является σ – локально конечным вполне coz – аддитивным u – открытым. Следовательно $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}^*$.

Для продолжения доказательства теоремы 2.10. докажем следующую.

Лемма 2.11. Пусть $\{U_s = f_s^{-1}((0,1]) : s \in S\}$ точечно-конечное u – открытое семейство, где $f_s : uX \rightarrow I_s$ и – функция $I_s = I$ для всех $s \in S$. Тогда оно порождает coz – отображение $f = \Delta \{f_s : s \in S\} : uX \rightarrow \mathbf{F}(S)$, где $\mathbf{F}(S)$ обозначает подмножество, $I^S = \prod \{I_s : s \in S\}$ состоящее из всех точек $x = (x_s : s \in S)$, которые имеют только конечное число ненулевых координат x_s .

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{F}(S)$ сепарабельное метризуемое пространство. Тогда для каждого открытого множества $U \subset \mathbf{F}(S)$ имеем $f^{-1}(U) = f_s^{-1}(p_s(U))$, где $p_s : \mathbf{F}(S) \rightarrow I_s$ естественная проекция. Тогда $f^{-1}(U) \in Cz_u$. Что и требовалось доказать.

Пусть $\alpha = \{W_s : s \in S\}$ произвольное σ – локально конечное u – открытое покрытие. Для каждого $i \in \mathcal{O}\Gamma$ семейства $\alpha_i = \{W_s : s \in S_i\}$ локально конечная u – открытая система. Тогда по Лемме 2.11 существует coz – отображение $f_i : uX \rightarrow \mathbf{F}(S_i)$, где $\mathbf{F}(S)$ снабжено метрикой d_i , определённой как $d_i(x, y) = \sup \{|x_s - y_s|, s \in S\}$. Каждое f_i – coz – отображение и таково $f = D \{f_i : i \in \mathcal{O}\Gamma\} : uX \otimes \mathbf{X} \{\mathbf{F}(S_i) : i \in \mathcal{O}\Gamma\}$ [4]. Следовательно, по (1) f равномерно непрерывно относительно метрической равномерности v на $\mathbf{X} \{\mathbf{F}(S_i) : i \in \mathcal{O}\Gamma\}$ и её предкомпактной рефлексии v_p . По (4) Теорема 2.6. f равномерно непрерывна относительно тонкой равномерности v_f на $\mathbf{X} \{\mathbf{F}(S_i) : i \in \mathcal{O}\Gamma\}$. Тонкая

равномерность ν_f на X имеет базу состоящую из всех открытых покрытий [21]. Для каждого $s \in S_i$ множество в форме $f_s^{-1}(W)$, где W открыто в I_s , является прообразом при f , открытого множества $p_i^{-1}(p_s^{-1}(W))$ из $X \{F(S_i):iO\Gamma\}$, где $p_i: X \{F(S_i):iO\Gamma\} \otimes F(S_i)$ и $p_s: F(S_i) \rightarrow I_s$ естественные проекции. Покрытие $b = \{p_i^{-1}(p_s^{-1}(W)): s \in S, i \in O\Gamma\}$ равномерно относительно тонкой равномерности ν_f . Пусть γ открытое σ -локально конечное покрытие, звездно вписанное в β . Тогда $\gamma \in \nu_f$ и $f^{-1}(\gamma)$ открытое σ -локально конечное покрытие, звездно вписанное в α .

(2) \Rightarrow (3). Очевидно.

(3) \Rightarrow (1). Пусть $f: uX \rightarrow \nu Y$ равномерно непрерывное отображение в метризуемое равномерное пространство νY . Тогда отображение $f: uX \rightarrow \nu_p Y$ также равномерно непрерывно. По (3) Леммы 1.3. и метризуемости νY мы имеем $Z_\nu = Z_{\nu_p} = Z(Y)$. Тонкая равномерность ν_f метризуемого равномерного пространства νY имеет базу, состоящую из всех открытых локально конечных покрытий, следовательно $f: uX \rightarrow \nu_f Y$ также равномерно непрерывно. Теорема доказана.

Следствие 2.12. Для равномерного пространства uX существует такая coz – тонкая равномерность u_{cf} , что $u \subset u_{cf}$ и $u_\omega^z \subset u_{cf}$.

Доказательство. Равномерность u имеет базу из некоторого семейства σ – равномерно дискретных вполне coz – аддитивных u – открытых покрытий [13], следовательно $u \subset u_{cf}$. Каждое счетное u – открытое покрытие σ – локально конечно, следовательно, имеем $u_\omega^z \subset u_{cf}$. Что и требовалось доказать.

Следствие 2.13 Каждый z_u – ультрафильтр Коши относительно равномерности u_{cf} является счетно центрированным.

Доказательство. Следует из $u_\omega^z \subset u_{cf}$.

Следствие 2.14. Пополнение $\mu_u X$ равномерного пространства uX относительно равномерности u_{cf} содержится в Волмановской геалкомпактификации $\nu_u X$, т.е. $\mu_u X \subset \nu_u X \subset \beta_u X$.

Доказательство. Непосредственно следует из Следствия 2.13.

Следствие 2.15. Пусть W равномерность пополнения $\mu_u X$. Тогда $\beta_\nu(\mu_u X) = \beta_u X$.

Следствие. Следует непосредственно из Следствия 2.14.

Теорема 2.16. Пусть uX и νY coz – тонкие равномерные пространства с первой аксиомой счетности. Тогда $\mu_u X$ равномерно гомеоморфно $\mu_\nu Y$, если и только, если $\beta_u X$ гомеоморфно $\beta_\nu Y$.

Доказательство. Пусть w и w' равномерности пополнений $\mu_u X$ и $\mu_\nu Y$ соответственно. Тогда $\beta_w(\mu_u X) = \beta_u X$ и $\beta_{w'}(\mu_\nu Y) = \beta_\nu Y$. Следовательно, $\beta_u X$ гомеоморфно $\beta_\nu Y$, если $\mu_u X$ равномерно гомеоморфно $\mu_\nu Y$.

Обратно, из гомеоморфности $\beta_u X$ и $\beta_\nu Y$ следует равномерный гомеоморфизм uX и νY (см. Теорему 2.8). Тогда пополнения $\mu_u X$ и $\mu_\nu Y$ равномерно гомеоморфны. Что и требовалось доказать.

Следствие 2.17. Пусть uX и νY полные coz – тонкие равномерные пространства с первой аксиомой счетности. Тогда uX равномерно гомеоморфно νY если и только, если $\beta_u X$ гомеоморфно $\beta_\nu Y$.

Доказательство. Следует из Теоремы 2.16.

Литература:

1. Arhangel'skii A.V. Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises [Text] /A.V. Arhangel'skii, V.I. Ponomarev-Reidel, translated from Russian, 1984. - 423 p.
2. Borubaev A.A. Spaces uniformed by coverings[Text] /A.A. Borubaev, A.A. Chekeev, P.S. Pankov. Budapest, 2003. - 170 p.

3. Charalambous M.G. A new covering dimension function for uniform spaces [Text] /M.G. Charalambous //J. London Math. Soc. (2) 11, 1975. –P.137-143.
4. Charalambous M.G. Further theory and applications of covering dimension of uniform spaces [Text] /M.G. Charalambous //Czech. Math. J. 41 (116), 1991.-P. 378-394.
5. Charalambous M.G. The dimension of metrizable subspaces of Eberleincompacta and Eberleincompactifications of metrizable spaces [Text] /M.G. Charalambous//Fundamenta Mathematicae 182, 2004. -P.41-52
6. Chekeev A.A. Uniformities for Wallman compactifications and realcompactifications.// Topol. and Appl. 201 (2016) p 145-156.
7. Chekeev A.A., Rakhmankulov B.Z. On β –like compactifications of the uniform spaces//Vestnik KRSU, V.16, No 5,- P.85-87 (in Russian).
8. Čech E. On bicomact spaces. [Text] /E.Čech//Ann. of Math. 38, 1937. –P. 823-844.
9. Chigogidze A.Ch. Relative dimensions, General Topology. Spaces of functions and dimension [Text] /A.Ch. Chigogidze //Moscow: MSU, 1985. –P.67-117 (in Russian).
10. Engelking R. General Topology [Text] /R. Engelking- Berlin: Heldermann, 1989. – 515 p.
11. Frink O. Compactifications and seminormal spaces [Text] /O. Frink //Amer. J. Math., 86, 1964. –P.602-607.
12. Frolik Z. A note on metric-fine spaces [Text] /Z. Frolik//Proceeding of the American Mathematical Society, V. 46, n. 1, 1974. - P.111-119.
13. Frolik Z. Four functor into paved spaces.[Text] /Z. Frolik //In seminar uniform spaces 1973-4. Matematickýústav ČSAV, Praha, 1975.- P.27-72
14. Gelfand J. On rings of continuous function on topological spaces. [Text] /J. Gelfand, A.Kolmogoroff //Dokl. Akad. Nauk SSSR 22, 1939. - P. 11-15. (in Russian)
15. Georgiou D.N. The inductive dimension of a space by a normal base [Text] /D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, K.L. Kozlov //VestnikMoskov.Univ., Ser. I, Mat. Mekh., N 3, 2009.- P. 7-14. (English translation:Moscow Univ. Math. Bull., 64 (3), 2009.-P. 95-101)
16. Gillman L.Rings of continuous functions [Text] /L.Gillman, M.Jerison//The Univ. Series in Higher Math., Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.–303 p.
17. Hager A.W. A note on certain subalgebras of $C(X)$ [Text] /A.W. Hager, D.J. Johnson //Canad. J. Math. 20, 1968. - P. 389-393.
18. Hager A.W. On inverse-closed subalgebra of $C(X)$ [Text] /A.W. Hager //Proc. Lond. Math. Soc. 19 (3), 1969. – P. 233-257.
19. Hager A.W. Some nearly fine uniform spaces [Text] /A.W. Hager //Proc. London Math. Soc. (3) 28, 1974.- P. 517-546.
20. Isbell J.R. Algebras of uniformly continuous functions[Text] /J.R. Isbell //Ann. of Math., 68, 1958.- P. 96-125.
21. Isbell J.R. Uniform spaces [Text] /J.R. Isbell //Providence, 1964. - 175 p.
22. Mrówka S. β – like compactifications [Text] /S.Mrówka//Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 24 (3-4), 1973. –P.279-287.
23. Steiner A.K., Steiner E.F. Nest generated intersection rings in Tychonoff spaces [Text] /A.K. Steiner, E.F. Steiner //Trans. of the American Math. Soc. 148, 1970. –P.589-601.
24. Stone M. Applications of the theory of Boolean rings to general topology [Text] /M. Stone //Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937). - P. 375-481.
25. Walker R. The Stone-Čechcompactification [Text] /R. Walker //Springer-Verlag, New York, Berlin, 1974.–333p.

Рецензент: д.ф.-м.н., доцент Канетов Б.Э.